

---

# Opciones americanas, valoración numérica y cálculo de la frontera de valores críticos

Alfonso CAMAÑO<sup>1</sup>

Profesor de Finanzas Cuantitativas en CIFF

**Resumen:** En este artículo se analizan las opciones americanas "call" y "put" con vencimiento finito como problemas de parada óptima. El problema de los contratos americanos es siempre doble, en primer lugar se trata de encontrar la función de valoración de los mismos y en segundo, se trata de caracterizar la estrategia óptima de ejercicio anticipado mediante la frontera de valores críticos. En el artículo se desarrollan teóricamente ambos problemas y se resuelven numéricamente.

Se asume que el subyacente es un activo que sigue un movimiento geométrico browniano cuyos parámetros deriva y volatilidad son conocidos.

La hipótesis de ausencia de arbitrajes y la valoración en la medida de probabilidad de riesgo neutro es parte integrante del análisis de este artículo, no obstante, todo el análisis parte del planteamiento de las opciones americanas como problemas de parada óptima y se llega a un problema de frontera libre con la ecuación de Black & Scholes pero por caminos completamente diferentes de los tradicionales. En ningún momento se construye un portafolio cuyo riesgo se anula mediante una operación de cobertura delta como se hizo en el papel de F. Black y M. Scholes.

**Palabras clave:** Opción Americana, Métodos Numéricos, Tiempo de Paro.

**Código JEL:** G13, G12.

**Abstract:** In this paper we analyzed American call and put vanilla options with finite maturity as problems of optimal stopping. The problem of American contracts is always double, first we have to find the value function and then later it is necessary to characterize the optimal strategy for exercising them by mean of computing the critical points boundary. Both tasks are developed and solved numerically in the paper.

It is assumed that the underlying is following a geometric brownian motion for which drift and volatility are known.

The no arbitrage hypothesis and risk neutral valuation are used throughout the paper, however, all analysis is made under the consideration of American options as problems of optimal stopping so that we reach the free boundary problems for the Black & Scholes PDE by a path completely different than the traditional way. We do not build up a portfolio free of risk by mean of delta hedging as done by F. Black y M. Scholes in their milestone paper.

**Key words:** American Option, Numerical Methods, Stopping Time.

**JEL Classification:** G13, G12.

## 1. INTRODUCCIÓN

Lo esencial de una opción americana es que el comprador decide el momento de percepción del "pay-off" que es una función no negativa  $G \geq 0$  conocida también como función de retribución.

$$G(t,S) = \max (S(t) - K, 0) = (S(t) - K)^+ \quad \text{call}$$

$$G(t,S) = \max (K - S(t), 0) = (K - S(t))^+ \quad \text{put}$$

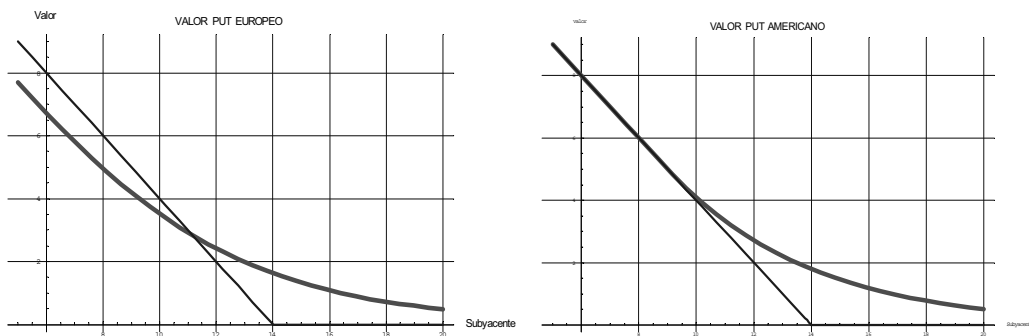
Por la flexibilidad en el ejercicio, dadas dos opciones una europea y otra americana sobre el mismo subyacente  $S$ , con el mismo "strike"  $K$  y vencimiento  $T$ , en todo momento se verifica que:

$$V_{europea}(t,S) \leq V_{americana}(t,S) \quad \forall (t,S) \in [0,T] \times [0,+\infty)$$

Una opción americana nunca puede tener un valor por debajo de su "pay-off" porque existiría una oportunidad de arbitraje comprando la opción y ejerciéndola:

$$\left. \begin{aligned} (S - K)^+ &\leq V_{call americana}(t,S) \\ (K - S)^+ &\leq V_{put americana}(t,S) \end{aligned} \right\} \quad \forall (t,S) \in [0,T] \times [0,+\infty)$$

En cambio una opción europea puede tomar valores inferiores al "pay-off" antes del vencimiento. Los gráficos del "pay-off" (azul) y del valor (rojo) como función del subyacente faltando  $T - t$  para el vencimiento de una opción "put" europea y otra "put" americana sobre el mismo subyacente e idénticos vencimiento  $T$  y "strike" son:



El valor de la opción americana está constantemente por encima del diagrama de "pay-off", a veces descansando en él como si fuera un obstáculo impermeable mientras que la europea lo atraviesa. Para las opciones americanas el "pay-off" es un obstáculo al que se tienen que adaptar. El contacto con el obstáculo es suave, es decir, en el punto de contacto la derivada del valor de la opción respecto del subyacente (delta) es -1 que es la pendiente del "pay-off".

Este valor del subyacente en el punto de contacto es muy importante, se denomina valor crítico y depende del plazo restante hasta el vencimiento de la opción. La misma opción, con el mismo "strike" tendrá valores críticos diferentes dependiendo del plazo  $t$ . De modo que todos

estos valores críticos constituyen una curva en el plano tiempo - subyacente que se denomina frontera de valores críticos  $S^*(t)$ . En una opción "put" si el subyacente está por debajo del valor crítico correspondiente debe ejercerse la opción.

La frontera de valores críticos  $S^*(t)$  determina el momento óptimo de ejercicio.  $S^*(t)$  divide el espacio  $[0,T] \times [0,+\infty)$  en dos zonas, a un lado de la frontera se tiene la región de ejercicio anticipado, región de parada o región de contacto con el obstáculo que, si es alcanzada por el subyacente la opción debería ser ejercida anticipadamente y, al otro lado, se tiene la región de continuación en la cual no es óptimo ejercer anticipadamente la opción. El lado de la frontera arriba o abajo en que se sitúa cada región depende de que se trate de una opción "put" o "call".

Más adelante se demostrará que en la región de continuación la función de valor de la opción  $V(t,S)$  verifica la ecuación en derivadas parciales (PDE) de Black & Scholes. En la región de ejercicio anticipado, el valor de la opción coincide con el "pay-off". De modo que la verdadera incógnita para las opciones americanas es la propia frontera de valores críticos, constituyendo un problema del tipo conocido como problemas de frontera libre.

El problema más sencillo de valoración de una opción americana es un "call" sobre una acción  $S$  que no pague dividendos. En este caso es sencillo probar con argumentos de no existencia de arbitrajes que nunca es óptimo ejercer antes del vencimiento, es decir, el valor crítico para cualquier plazo  $t$  es siempre  $S^*(t) = +\infty$ . Cualquier punto de  $[0,T] \times [0,+\infty)$  pertenece a la región de continuación, y debe verificarse la PDE de B & S con las condiciones inicial y de frontera de la opción "call" europea. Por consiguiente, estas opciones pueden ser valoradas con la conocida fórmula explícita de B & S.

$$V_{call}(S,t) = S \cdot N(d_1) - Ke^{-rt} \cdot N(d_2) \quad N(x) \text{ normal acumulada}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot t}{\sigma\sqrt{t}} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

Esto no es de aplicación a las opciones "put" americanas sobre acciones que no pagan dividendo, en este caso existe una frontera de valores críticos  $S^*(t)$  y será óptimo ejercer antes del vencimiento. Del mismo modo, con acciones que paguen dividendo, las opciones "call" o "put" de tipo americano no pueden ser valoradas con las fórmulas explícitas de B & S y siempre es posible que sea óptimo ejercer antes del vencimiento.

Las opciones americanas pueden conceptualizarse como juegos asociados al proceso estocástico seguido por el subyacente  $S_t$  en los que el comprador paga una prima por jugar pudiendo salirse cuando lo desee percibiendo el "pay-off" o función de retribución establecida  $G(S_t)$  o dejando expirar su derecho al vencimiento  $T$ . El jugador/comprador va observando en cada momento el valor del subyacente, conoce cuanto percibiría si se saliera en ese momento y tiene que decidir si se detiene ejerciendo su derecho o continúa jugando. Sólo se ejerce una vez y cuando se ejerce el derecho se extingue, si se quiere volver a jugar será necesario volver a comprar el derecho a jugar.

Los derechos del comprador son transferibles de forma que siempre existe la posibilidad de vender a un tercero la posibilidad de seguir jugando y salir del juego sin haber ejercido anticipadamente. Mientras que la venta del derecho de seguir jugando implique ingresos

superiores a ejercer y percibir el "pay-off" nadie ejercerá anticipadamente, en todo caso, si no le interesase seguir jugando vendería el juego a un tercero. El valor del juego (valor de la opción)  $V(t, S)$  en ausencia de arbitrajes nunca puede ser inferior al "pay-off", de lo contrario sería posible comprar el juego y ejercer inmediatamente realizando un beneficio cierto sin la asunción de ningún riesgo (arbitraje).

$$V(t, S) \geq G(S) \quad \forall (t, S) \in [0, T] \times [0, +\infty)$$

Sólo tiene sentido ejercer anticipadamente cuando el valor del juego sea igual al "pay-off", nunca antes. Si el jugador conociera el valor del juego en todo momento, dispondría de más información sobre posibles estrategias óptimas. El problema es que el jugador no conoce ni el valor del juego ni la (o las) estrategia óptima, lo único que conoce es la función de retribución  $G(S_t)$ .

## 2. PROBLEMAS DE PARADA ÓPTIMA CON HORIZONTE TEMPORAL FINITO

Los problemas de parada óptima se dan en ámbitos tan diversos como las Finanzas, Economía, Teoría de Juegos Secuenciales, Ingeniería, etc. En este documento se estudian brevemente los problemas de parada óptima con horizonte temporal finito, por su relación directa con las opciones americanas. Se enuncian algunos resultados de existencia de solución, se analiza la relación con los denominados problemas de frontera libre y se resuelven por procedimientos numéricos los problemas de este tipo relativos a las opciones americanas.

Sea  $X_t$  un proceso fuerte de Markov que toma valores en  $\mathbb{R}$  (o podría ser en  $\mathbb{R}^n$ ) definido en un espacio filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ , adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  que cumple las condiciones usuales de que es continua por la derecha, o sea que  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$  y que todas las  $\sigma$ -álgebras de la filtración contienen a todos los conjuntos  $P$ -nulos. Supóngase, además, que el proceso de Markov  $X_t$  es homogéneo en el tiempo y que la probabilidad de transición partiendo en  $s$  de  $x$  y llegando en  $t$  a algún punto del conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  viene dada por:

$$P(s, x; t, A) = \int_A p(x, y, t - s) dy$$

donde  $p(x, y, t - s)$  es la densidad de transición, función de  $t - s$  pero no del tiempo de partida ni del tiempo de llegada. El proceso empieza fresco en cualquier momento  $s$  desde el punto donde se ubique  $X_s$ .

A los efectos de este artículo se entiende por tiempo de parada ("stopping time") cualquier variable aleatoria  $\tau$  que tome valores en  $[0, +\infty)$  y tal que  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0$  es decir, que un tiempo de parada toma valores reales positivos siempre finitos y, además, el evento  $\{\tau \leq t\}$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible para cualquier valor del tiempo, dicho de otro modo, que en cualquier momento  $t$  se sabe si ha ocurrido el tiempo de parada o no, o sea, se sabe si se debe parar o no.

Los tiempos de parada que más interesan se denominan primeros contactos y se caracterizan por medio de un subconjunto  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^+$  medible ( $\mathcal{R} \in \mathfrak{F}$ ) de modo que  $\tau_{\mathcal{R}} = \inf \{t \geq 0: X_t \in \mathcal{R}\}$ . En otras palabras, el tiempo de parada toma el valor del momento en el que por primera vez  $X_t$  alcanza el conjunto  $\mathcal{R}$ .

Se considera además una función medible no negativa de dos variables:

$$G: [0, T] \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (t, x) \longrightarrow G(t, x)$$

que va a hacer el papel de función de retribución dependiente tanto del valor del proceso como del tiempo o del plazo remanente.

El proceso de Markov  $X_t$  puede considerarse un juego en el que el jugador tiene el derecho de detener el juego cuando lo desee y percibir lo que indique la función de retribución en dicho momento. Dado un vencimiento  $T$  se asume que  $E_{0,x} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} G(t, X_t) \right] < \infty$ , circunstancia que está garantizada para muchos procesos y muchas funciones de retribución.

Dado que:

$$G(\tau, X_\tau) \leq \sup_{0 \leq t \leq T} G(t, X_t) \quad \forall \tau \text{ tiempo de parada } 0 \leq \tau \leq T$$

Se tiene que:

$$\left. \begin{aligned} E_{0,x} [G(\tau, X_\tau)] &\leq E_{0,x} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} G(t, X_t) \right] < +\infty \\ \sup_{\tau} E_{0,x} [G(\tau, X_\tau)] &\leq E_{0,x} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} G(t, X_t) \right] < +\infty \end{aligned} \right\} \quad \forall \tau \text{ tiempo de parada } 0 \leq \tau \leq T$$

Por consiguiente, el valor esperado de la retribución del juego bajo cualquier tiempo de parada  $\tau$  que verifique  $0 \leq \tau \leq T$  existe siempre y es un número real finito. Más aún, bajo la hipótesis asumida el extremo superior del conjunto de los valores esperados de la retribución del juego con todas las posibles estrategias de parada aceptables ( $\tau \leq T$ ), existe y es finito.

Ahora bien, aunque existe y sea finito dicho extremo superior puede existir o no un tiempo de parada  $\tau^*$  tal que utilizándolo como estrategia se alcance dicho extremo superior, o sea tal que:

$$E_{0,x} [G(\tau^*, X_{\tau^*})] = \sup_{0 \leq \tau \leq T} E_{0,x} [G(\tau, X_\tau)]$$

La función de retribución permite definir un proceso  $G(t, X_t)$  que señala la retribución del juego si se detuviera. Para jugar habrá que pagar una cantidad inicial  $V(t, x)$  que dependerá del plazo remanente  $T - t$  hasta el vencimiento y, por lo tanto, del momento actual  $t$  y también dependerá del punto de partida  $X_t$ . El pago realizado dará derecho a retirarse en cualquier

momento antes del vencimiento  $T$ , o en el propio vencimiento, ejerciendo el derecho a percibir lo que indique la función de retribución, también será posible dejar que el derecho expire.

Las claves para un jugador potencial son: primero saber cual es un precio justo que se puede pagar por "jugar", segundo definir la estrategia de salida del juego de modo que en cualquier momento conozca si debe retirarse o continuar jugando. Obviamente, cualquier jugador elegirá su estrategia de parada intentando maximizar el valor esperado de su retribución.

No obstante, dado que  $X_t$  sigue un proceso fuerte de Markov, toda la información que permite decidir si continuar jugando o detenerse y cobrar la función de retribución debe estar condensada en el par  $(t, X_t)$  formado por el momento y el valor actual del proceso, no dependerá de la trayectoria pasada. Dicho de otra forma, para cada par  $(t, X_t)$  se puede reconocer si se debe detener el proceso o continuar, por lo tanto deben existir dos conjuntos  $\mathcal{R} \subset [0, T] \times \mathbb{R}^+$  y  $\mathcal{B} \subset [0, T] \times \mathbb{R}^+$  que conformen una partición de  $[0, T] \times \mathbb{R}^+$  tales que si  $(t, X_t) \in \mathcal{R}$  es óptimo detener el juego, por el contrario si  $(t, X_t) \in \mathcal{B}$  lo óptimo sería continuar.

Por definición, se entiende por estrategia óptima del juego un tiempo de parada  $\tau \leq T$  tal que:

$$E_{0,x} [G(\tau^*, X_{\tau^*})] = \sup_{0 \leq \tau \leq T} E_{0,x} [G(\tau, X_\tau)] \quad \tau \text{ tiempo de parada}$$

o sea que una estrategia óptima es aquella que consiste en detenerse siguiendo un tiempo de parada  $\tau^* \leq T$  de forma que el valor esperado de la función de retribución sea el extremo superior de todos los valores esperados de la función de retribución para todos los tiempos de parada, es decir para todas las estrategias de parada posibles.

El valor del juego en ausencia de arbitraje  $V(t, x)$  tiene que ser igual al valor esperado de la función de retribución cuando se sigue la estrategia óptima. Si el juego fuera más económico comprando el juego y jugándolo con la estrategia óptima se realizaría un arbitraje y si el precio del juego fuera mayor vendiendo el juego se realizaría un arbitraje.

Por consiguiente, se define el valor del juego:

$$V(t, x) = \sup_{0 \leq \tau \leq T-t} E_{t,x} [G(t + \tau, X_{t+\tau})] < +\infty \quad \tau \text{ tiempo de parada}$$

que con la hipótesis asumida existe y es finito siempre, incluso aunque no existiera la estrategia óptima de parada. Si dicha estrategia óptima existiese entonces:

$$V(t, x) = E_{t,x} [G(t + \tau^*, X_{t+\tau^*})] = \sup_{0 \leq \tau \leq T-t} E_{t,x} [G(t + \tau, X_{t+\tau})] < +\infty$$

La caracterización explícita o numérica de la función de valor  $V(t, x)$  y de la estrategia óptima de parada si existe es lo que se conoce como problema de parada óptima.

En este contexto una función medible  $f: [0, T] \times \mathbb{R}^+$  es superarmónica respecto del proceso de Markov  $X_t$  cuando:

$$E_{t,x} [f(t+\tau, X_{t+\tau})] \leq f(t,x) \quad \forall \tau \text{ tiempo de parada y } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall t \in [0, T]$$

Las funciones superarmónicas son tales que su valor a lo largo del proceso  $X_t$  decrece en media con independencia del valor de partida.

A partir del proceso de Markov  $X_t$  se puede definir otro proceso de Markov bidimensional con valores en  $[0, T] \times \mathbb{R}^+$  que puede definirse por el par  $(t, X_t)$ . El generador infinitesimal  $L_{(t,x)}$  del proceso de Markov  $(t, X_t)$  viene dado por:

$$L_{(t,x)} f(t,x) = \lim_{s \downarrow 0} \frac{E_{t,x} [f(t+s, X_{t+s})] - f(t,x)}{s}$$

También se pueden caracterizar las funciones superarmónicas mediante el generador infinitesimal puesto que:

$$E_{t,x} [f(t+s, X_{t+s})] \leq f(t,x) \quad \Leftrightarrow \quad L_x f(t,x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall t \in [0, T]$$

El siguiente teorema cuya demostración puede encontrarse en la monografía "*Optimal Stopping and Free Boundary Problems*" de Goran Peskir y Albert Shiryaev establece condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un tiempo de parada óptimo.

Teorema 1 - "Considérese el problema de parada óptima con horizonte finito  $T$  asociado con el proceso de Markov  $X_t$  y la función de retribución  $G(t,x)$  verificando la acotación

$$E_{0,x} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} G(t, X_t) \right] < +\infty \quad \text{en el que se ha comenzado el proceso en } (t,x), \text{ la condición necesaria}$$

y suficiente para que exista un tiempo de parada óptimo  $t + \tau^*$  con  $\tau^* \leq T - t$  es que exista la menor función superarmónica  $\hat{V}(t,x)$  que domine la función de retribución  $G(t,x)$ .

Además, si se define la función de valor a partir de la estrategia óptima:

$$V(t,x) = E_{t,x} [G(t + \tau^*, X_{t+\tau^*})] = \sup_{\tau \leq T-t} E_{t,x} [G(t + \tau, X_{t+\tau})] \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

se tiene que:

$$V(t,x) = \hat{V}(t,x) \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

y definidos los conjuntos:

$$\mathcal{B} = \{(t,x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ : V(t,x) > G(t,x)\} \quad \text{región de continuación.}$$

$$\mathcal{R} = \{(t,x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ : V(t,x) = G(t,x)\} \quad \text{región de parada.}$$

el tiempo de parada correspondiente al primer contacto con la región de parada  $\tau_{t,\mathcal{R}} = \inf \{s \geq 0: (t+s, X_{t+s}) \in \mathcal{R}\}$  es tal que  $t+\tau_{t,\mathcal{R}} \leq T$  es un tiempo de parada óptimo y además  $\tau_{t,\mathcal{R}} \leq \tau^*$ .

La solución de los problemas de parada óptima con vencimiento finito pasa por determinar la menor función superarmónica  $V(t,x)$  que domine la función de retribución  $G(t,x)$ . A partir de dicha función quedan determinadas las regiones  $\mathcal{R}$  de parada óptima y  $\mathcal{B}$  de continuación y se tiene que:

$$L_{(t,x)}V(t,x) \leq 0 \quad \text{con} \quad \begin{cases} V(t,x) > G(t,x) & \forall t \in [0,T] \quad \forall x \in \mathcal{B} \\ V(t,x) = G(t,x) & \forall t \in [0,T] \quad \forall x \in \mathcal{R} \\ V(T,x) = G(T,x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ V \text{ es mínima, cualquier otra función superarmónica} \\ & \text{que domina } G \text{ debe ser mayor que } V \end{cases}$$

En la medida en que la función de retribución  $G(t,x)$  sea una función continua la función  $V(t,x)$  también será continua y la región de parada  $\mathcal{R} = \{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^+: V(t,x) = G(t,x)\}$  donde ambas funciones coinciden será un subconjunto cerrado de  $[0,T] \times \mathbb{R}^+$ . La región de continuación  $\mathcal{B} = \{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^+: V(t,x) > G(t,x)\}$  será un conjunto abierto de  $[0,T] \times \mathbb{R}^+$ .

A la frontera  $\partial\mathcal{B}$  de la región de continuación, que obviamente no está contenida en dicha región sino en la región de parada  $\mathcal{R}$  que es cerrada, se la denomina frontera de valores críticos ya que marca la separación entre los valores del proceso en los que resulta óptimo detenerse y aquellos en los que resulta óptimo continuar. En general, la frontera será una curva en el plano tiempo - valores del proceso. La forma y las propiedades de esta curva son importantes pero dependen del problema de parada particular.

En estas condiciones, la función de valor es la solución en la región abierta  $\mathcal{B}$  del problema de Dirichlet:

$$\begin{aligned} L_{(t,x)}V &= 0 & \text{en } \mathcal{B} & \text{PDE} \\ V(T,x) &= G(T,x) & & \text{Condición final} \\ V|_{\partial\mathcal{B}} &= G|_{\partial\mathcal{B}} & & \text{Condición de contorno} \end{aligned}$$

La comprobación de esto se deduce de forma inmediata a partir del hecho de que  $X_t$  es un proceso fuerte de Markov. En efecto:

$$E_{t,x} [V(t+s, X_{t+s})] = E_{t,x} [E_{t+s, X_{t+s}} [G(t+s+\tau_{s\mathcal{R}}, X_{t+s+\tau_{s\mathcal{R}}})]] = E_{t,x} [G(t+\tau_{s\mathcal{R}}, X_{t+\tau_{s\mathcal{R}}})] = V(t,x)$$

$$E_{t,x} [V(t+s, X_{t+s})] - V(t,x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ - \mathcal{R}$$

de donde  $L_{(t,x)}V = 0 \quad \forall (t,x) \in \mathcal{B}$ . Resuelto el problema en  $\mathcal{B}$  en  $\mathcal{R}$  la solución es inmediata pues debe coincidir con la función de retribución.



Cuando se conoce la frontera de valores críticos se ha reducido el problema de parada óptima con horizonte finito a un problema de Dirichlet en la región de continuación. En la práctica, sin embargo, no se suele conocer la frontera de antemano. La frontera es parte de la solución del problema que se compone de la función de valor  $V(t,x)$  junto con la regiones de parada, de continuación y la frontera, es decir la solución es la función de valor más la estrategia óptima de parada.

En ocasiones se plantea el problema descontado consistente en la búsqueda del tiempo de parada que maximiza el valor esperado del valor presente de la función de retribución, en lugar de maximizar el valor esperado de la función de retribución.

$$V(t,x) = \sup_{\tau \leq T-t} E_{t,x} \left[ e^{-r\tau} \cdot G(t+\tau, X_{t+\tau}) \right] \quad \text{con } r > 0$$

Este problema se reduce al problema ordinario de parada óptima sustituyendo el proceso de Markov  $(t, X_t)$  por el proceso de Markov  $(t, \tilde{X}_t)$  "killed" tal que  $G(t, \tilde{X}_t) = e^{rt} \cdot G(t, X_t)$  es decir, el nuevo proceso de Markov toma valores tales que su función de retribución es el valor presente del valor de la función de retribución en el valor del proceso antiguo.

Existe una relación simple entre el generador infinitesimal  $L_{(t, \tilde{X})}$  del proceso de Markov  $(t, X_t)$  y el generador infinitesimal  $L_{(t, \tilde{X})}$  del proceso "killed". Concretamente  $L_{(t, \tilde{X})} = L_{(t, X)} - r \cdot I$ .

En el caso de que  $X_t$  sea una difusión de Ito en tiempo homogéneo caracterizada por su ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu(X_t) \cdot dt + \sigma(X_t) \cdot dW \quad W \text{ proceso de Wiener}$$

El generador infinitesimal del proceso  $(t, X_t)$  es el operador diferencial:

$$L_{(t, X)} f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x) x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} [\sigma(x)]^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Para el problema descontado de parada óptima el generador infinitesimal  $L_{(t, \tilde{X})}$  del proceso "killed" vendrá dado por:

$$L_{(t, \tilde{X})} f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x) x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} [\sigma(x)]^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - r \cdot f$$

de modo que la solución del problema descontado de parada óptima con horizonte finito conociendo la frontera de valores críticos  $\partial \mathcal{B}$  es la solución del problema de Dirichlet:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mu(x) x \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} [\sigma(x)]^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - r \cdot V = 0 \quad \text{en } \mathcal{B} \text{ PDE parabólica}$$

$$V(T, x) = G(T, x)$$

Condición final

$$V|_{\partial \mathcal{B}} = G|_{\partial \mathcal{B}}$$

Condición de contorno

que es un problema de Dirichlet con una ecuación en derivadas parciales de tipo parabólico retrógrada. La equivalencia teórica entre el problema de parada óptima y el problema de Dirichlet es eso, teórica, pero no supone la resolución del problema porque se desconoce la frontera de valores críticos a lo largo de la cual se tiene la condición de contorno. La determinación de la frontera  $\partial\mathcal{B}$  es parte de la solución del problema, por eso se denominan problemas de frontera libre o también problemas del obstáculo.

### 3. OPCIONES AMERICANAS COMO PROBLEMAS DE PARADA ÓPTIMA

Sea  $S$  una acción que paga un dividendo continuo  $d$  y que en la medida de probabilidad de riesgo neutro sigue un GBM  $S_t$  gobernado por la ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dS}{S} = (r - d) \cdot dt + \sigma dW \quad \left\{ \begin{array}{l} r \text{ tasa de interes libre de riesgo} \\ d \text{ dividendo continuo pagado por } S \\ \sigma \text{ volatilidad de } S \\ W \text{ proceso de Wiener} \end{array} \right.$$

cuya solución se sabe que es:

$$S_t = S_0 \cdot e^{\sigma W_t + \left(r - d - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}$$

Sobre problemas de parada óptima definidos en este proceso de Markov  $S_t$  se van a aplicar los conceptos de la sección anterior.

#### 1 - Put americana

Se considera una opción "put" de tipo americano con vencimiento en  $T$  y "strike"  $K$  sobre la acción  $S$ . Esta opción para el comprador es un juego cuya función de retribución o "pay-off" es:

$$G_{put}(t, S) = \max(K - S, 0) = (K - S)^+$$

Naturalmente, en este caso se verifican las acotaciones:

$$\left. \begin{array}{l} (K - S_t)^+ \leq K \\ E_{0,S} \left[ (K - S_\tau)^+ \right] \leq K \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sup_{0 \leq t \leq T} (K - S_t)^+ \leq K \\ E_{0,S} \left[ \sup_{0 \leq \tau \leq T} (K - S_\tau)^+ \right] \leq K \end{array} \quad \forall \tau \text{ tiempo de parada}$$

Esto permite aplicar los resultados de la sección anterior.

El problema de la opción "put" vainilla americana con vencimiento finito es un problema descontado de parada óptima. El valor de la opción "put" americana con vencimiento finito vendrá dado por:

$$V_{put}(t, S) = \sup_{\tau \leq T-t} E_{t,S} \left[ e^{-r\tau} \cdot (K - S_{t+\tau})^+ \right]$$

La función valor está definida y toma un valor finito para cada par  $(t, S)$  porque el conjunto de posibles valores que tome  $E_{t,S} \left[ e^{-r\tau} \cdot (K - S_{t+\tau})^+ \right]$  para todos los tiempos de parada que verifiquen  $\tau \leq T - t$  está acotado superiormente luego existe su extremo superior, es decir existe  $V_{put}(t, S)$ .

Además, al vencimiento de la opción la estrategia óptima es inmediata y el valor de la opción coincide con el "pay-off", o sea  $V_{put}(t, S) = (K - S)^+$

De acuerdo con el Teorema 1 la existencia de  $V_{put}(t, S)$ , menor función superarmónica que domina a la función de retribución, es condición necesaria y suficiente para que exista un tiempo óptimo de parada que viene determinado por la región de ejercicio anticipado:

$$\mathcal{R} = \left\{ (t, S) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ : V_{put}(t, S) = (K - S)^+ \right\}$$

$$\tau_{t, \mathcal{R}} = \inf \{ s \geq 0 : (t + s, S_{t+s}) \in \mathcal{R} \}$$

Con la estrategia dada por el tiempo de parada óptimo se tiene una nueva expresión para el valor de la opción "put" americana tanto en la región de ejercicio anticipado en cuyo caso  $\tau_{t, \mathcal{R}} = 0$  como fuera de ella (región de continuación):

$$V_{put}(t, S) = E_{t,S} \left[ e^{-r\tau_{t, \mathcal{R}}} \cdot (K - S_{t+\tau_{t, \mathcal{R}}})^+ \right]$$

La caracterización de la opción "put" americana con vencimiento finito como un problema de parada óptima no ayuda mucho para el cálculo en la práctica del valor de la opción o de la estrategia óptima de ejercicio. Se sabe que el valor de la función  $V_{put}(t, S)$  está definido y es finito, se sabe también que existe un tiempo de parada óptimo  $\tau_{t, \mathcal{R}}$  pero el cómputo del valor aplicando la fórmula anterior requeriría conocer la densidad de probabilidad del primer contacto con la región de ejercicio anticipado  $\mathcal{R} = \{(t, S) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ : V_{put}(t, S) = (K - S)^+\}$  partiendo de  $(t, S)$ . Esto es ya de por sí difícil, pero si, además, la frontera de valores críticos  $S^*(t)$  que delimita  $\mathcal{R}$  es desconocida entonces el problema por esta vía es intratable.

Por ello, la forma de abordar el problema en la práctica es diferente. Si se supone conocida la frontera  $\partial\mathcal{B}$  el problema de la opción "put" vainilla americana es equivalente al problema siguiente:

$$\frac{\partial V_{put}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_{put}}{\partial S^2} + (r - d) S \frac{\partial V_{put}}{\partial S} - r \cdot V_{put} = 0 \quad \text{PDE}$$

$$\text{en la región de continuación } \mathcal{B} = \left\{ (t, S) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ : V_{put}(t, S) = (K - S)^+ \right\}$$

$$V_{put}(T, S) = (K - S)^+ \quad \forall S \in \mathbb{R}^+ \quad \text{Condición final}$$

$$V_{put} \Big|_{\partial\mathcal{B}} = (K - S)^+ \Big|_{\partial\mathcal{B}} \quad \text{Condiciones de contorno}$$

donde las incógnitas son  $V_{put}(t, S)$  y  $\partial\mathcal{B}$ .

La frontera  $\partial\mathcal{B}$  es parte de la solución del problema junto con  $V_{put}(t, S)$ , es decir, se trata de un problema de frontera libre. La frontera en este caso estará constituida por un valor crítico para cada  $t \in [0, T]$  de modo que se puede considerar que  $\partial\mathcal{B}$  es una curva que se nota mediante  $S^*(t)$ . Más adelante se van a estudiar las propiedades de la frontera con detalle.

Como el valor final  $(K - S)^+$  es continuo y no depende del tiempo, y como se busca una función de valor positiva, el problema parabólico anterior con su efecto regularizante tiene solución única  $V_{put}(t, S)$  que además es de clase  $C^2(\mathcal{B})$  en la región de continuación, no necesariamente en la frontera ni al vencimiento, de hecho al vencimiento es  $V_{put}(T, S) = (K - S)^+$  que no es diferenciable en  $S = K$ .

Se va a probar a continuación que:

$$\left. \frac{\partial V_{put}(t, S)}{\partial S} \right|_{(t, S) = (t, S^*(t))} = \left. \frac{\partial (K - S)^+}{\partial S} \right|_{(t, S) = (t, S^*(t))} = -1$$

lo que se conoce como "smooth fit" o contacto suave entre la función de valor y la función de "pay-off".

En efecto sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $S^*(t) + \varepsilon < K$  lo cual siempre será posible en cualquier momento antes del vencimiento T. Entonces:

$$\frac{V_{put}(t, S^*(t) + \varepsilon) - V_{put}(t, S^*(t))}{\varepsilon} \geq \frac{(K - (S^*(t) + \varepsilon))^+ - (K - S^*(t))^+}{\varepsilon} = -1$$

puesto que  $V_{put}(t, S^*(t)) = (K - S^*(t))^+$  porque en la frontera valor y "pay-off" coinciden y  $V_{put}(t, S^*(t) + \varepsilon) > (K - (S^*(t) + \varepsilon))^+$  porque en la región de continuación  $(t, S^*(t) + \varepsilon) \in \mathcal{B}$  el valor de la opción es superior al "pay-off".

Tomando límites cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  en la expresión anterior se obtiene que:

$$\left. \frac{\partial V_{put}(t, S)}{\partial S} \right|_{(t, S) = (t, S^*(t))} \geq -1$$

Para demostrar la desigualdad contraria sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $S^*(t) + \varepsilon < K$  y se considera el tiempo de parada  $\tau_\varepsilon$  que es óptimo para valorar  $V_{put}(t, S^*(t) + \varepsilon)$ , o sea que:

$$V_{put}(t, S^*(t) + \varepsilon) = E_{t, S^*(t) + \varepsilon} \left[ e^{-r \cdot \tau_\varepsilon} \cdot (K - S_{t + \tau_\varepsilon})^+ \right] = E_{0, S^*(t) + \varepsilon} \left[ e^{-r \cdot \tau_\varepsilon} \cdot (K - (S^*(t) + \varepsilon) \cdot S_{\tau_\varepsilon})^+ \right]$$

Entonces:

$$\begin{aligned} V_{put}(t, S^*(t) + \varepsilon) - V_{put}(t, S^*(t)) &\leq E \left[ e^{-r \cdot \tau_\varepsilon} \cdot (K - (S^*(t) + \varepsilon) \cdot S_{\tau_\varepsilon})^+ \right] - E \left[ e^{-r \cdot \tau_\varepsilon} \cdot (K - S^*(t) \cdot S_{\tau_\varepsilon})^+ \right] \leq \\ &\leq E \left[ e^{-r \cdot \tau_\varepsilon} \cdot \left( (K - (S^*(t) + \varepsilon) \cdot S_{\tau_\varepsilon})^+ - (K - S^*(t) \cdot S_{\tau_\varepsilon})^+ \right) \cdot \chi_{\{(S^*(t) + \varepsilon) \cdot S_{\tau_\varepsilon} < K\}} \right] = -\varepsilon \cdot E \left[ e^{-r \cdot \tau_\varepsilon} \cdot \left( S_{\tau_\varepsilon} \cdot \chi_{\{(S^*(t) + \varepsilon) \cdot S_{\tau_\varepsilon} < K\}} \right) \right] \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{X}_{\{(S^*(t)+\varepsilon) \cdot S_{\tau_\varepsilon} < K\}}$  es la variable aleatoria característica que toma el valor 1 si  $(S^*(t) + \varepsilon) \cdot S_{\tau_\varepsilon} < K$  y toma el valor 0 en caso contrario.

Ahora bien, conforme  $\varepsilon \downarrow 0$  se tiene que el tiempo de parada óptimo  $\tau_\varepsilon \rightarrow 0$  pues  $S^*(t)$  está en la frontera y es óptimo ejercer anticipadamente. Por consiguiente:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} E \left[ e^{-r \cdot \tau_\varepsilon} \cdot \left( S_{\tau_\varepsilon} \cdot P \left( \left\{ (S^*(t) + \varepsilon) \cdot S_{\tau_\varepsilon} < K \right\} \right) \right) \right] = 1 \Rightarrow \left. \frac{\partial V_{put}(t, S)}{\partial S} \right|_{(t, S) = (t, S^*(t))} \leq -1$$

Esto implica que se tiene que:

$$\left. \frac{\partial V_{put}(t, S)}{\partial S} \right|_{(t, S) = (t, S^*(t))} = -1$$

Es decir, en el caso de la opción "put" americana con vencimiento finito la condición de "smooth fit" es consecuencia de las hipótesis del problema. La solución del problema de frontera libre, función de valor  $V_{put}(t, S)$  y frontera de valores críticos  $S^*(t)$  van a verificar la condición de contacto suave sin imponer ninguna condición. Los procedimientos numéricos que se van a detallar más adelante para resolver el problema de la opción "put" americana no utilizan la condición de contacto suave, sino que únicamente verifican la PDE y las condiciones finales y de contorno y se impone que la función que se busca debe dominar al "pay-off". Sin embargo, se produce el contacto suave entre función de valor y "pay-off".

Adicionalmente, para cualquier valor de  $t \in [0, T]$  la aplicación parcial  $S$  a  $V_{put}(t, S)$  es no creciente convexa y  $\frac{\partial V_{put}(t, S)}{\partial S} \in [-1, 0]$ .

En términos financieros esto se traduce como que para un tiempo fijo el valor de la opción "put" americana como función del subyacente es decreciente, convexa y la delta está entre -1 y 0, ambos inclusive. De hecho, si se prueba que la delta de la opción existe y está siempre entre -1 y 0, de ello se deduce inmediatamente que  $S$  a  $V_{put}(t, S)$  es no creciente y convexa.

En efecto, se considera el tiempo de parada  $\tau_\varepsilon$  que es óptimo para valorar  $V_{put}(t, S - \varepsilon)$  y se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{V_{put}(t, S) - V_{put}(t, S - \varepsilon)}{\varepsilon} &\geq \frac{E \left[ e^{-r \cdot \tau_\varepsilon} \cdot (K - S \cdot S_{\tau_\varepsilon})^+ \right] - E \left[ e^{-r \cdot \tau_\varepsilon} \cdot (K - (S - \varepsilon) \cdot S_{\tau_\varepsilon})^+ \right]}{\varepsilon} = \\ &\geq \frac{E \left[ e^{-r \cdot \tau_\varepsilon} \cdot \left( (K - S \cdot S_{\tau_\varepsilon})^+ - (K - (S - \varepsilon) \cdot S_{\tau_\varepsilon})^+ \right) \cdot \mathcal{X}_{\{S \cdot S_{\tau_\varepsilon} < K\}} \right]}{\varepsilon} = -E \left[ e^{-r \cdot \tau_\varepsilon} \cdot S_{\tau_\varepsilon} \cdot \mathcal{X}_{\{S \cdot S_{\tau_\varepsilon} < K\}} \right] \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\frac{\partial V_{put}(t, S)}{\partial S} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{V_{put}(t, S) - V_{put}(t, S - \varepsilon)}{\varepsilon} \geq -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} E \left[ e^{-r \cdot \tau_\varepsilon} \cdot S_{\tau_\varepsilon} \cdot \mathcal{X}_{\{S \cdot S_{\tau_\varepsilon} < K\}} \right] = -1$$

Por otra parte, a partir de la solución  $S_t = S_0 \cdot e^{\sigma W_t + (r-d-\frac{1}{2}\sigma^2)t}$  del proceso GBM es obvio que para la misma trayectoria del proceso de Wiener  $W_t$  se tendrá que el punto de llegada será mayor cuanto mayor sea el punto de partida. Por lo tanto, partiendo de  $(t, S - \varepsilon)$  y de  $(t, S)$  el valor esperado del lugar en que se detengan ambos procesos para cualquier tiempo de parada  $\tau$  siempre será menor en el primer caso que en el segundo. O sea que:

$$E_{S-\varepsilon}[(S-\varepsilon) \cdot S_\tau] \leq E_S[S \cdot S_\tau] \Rightarrow E_{S-\varepsilon}[K - (S-\varepsilon) \cdot S_\tau] \geq E_S[K - S \cdot S_\tau] \quad \forall \tau \text{ tiempo de parada}$$

Por lo tanto:

$$V_{put}(t, S - \varepsilon) = \sup_{\tau \leq T-t} E_{t,S} [e^{-r\tau} \cdot (K - (S - \varepsilon) \cdot S_\tau)^+] \geq \sup_{\tau \leq T-t} E_{t,S} [e^{-r\tau} \cdot (K - S \cdot S_\tau)^+] = V_{put}(t, S)$$

Entonces:

$$\frac{\partial V_{put}(t, S)}{\partial S} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{V_{put}(t, S) - V_{put}(t, S - \varepsilon)}{\varepsilon} \leq 0 \Rightarrow \frac{\partial V_{put}(t, S)}{\partial S} \in [-1, 0]$$

La función de valor  $V_{put}(t, S)$  solución del problema de frontera libre es válida solamente para la región de continuación  $\mathcal{B}$  que es el dominio del problema de Dirichlet. En la región de ejercicio anticipado  $\mathcal{R}$  el valor viene dado por la función de retribución  $V_{put}(t, S) = (K - S)^+$ .

La frontera de valores críticos  $S^*(t)$  tiene interés en sí misma no sólo para el cálculo de la función de valor  $V_{put}(t, S)$  sino porque define de manera simple la estrategia óptima de ejercicio anticipado que debe seguir el tenedor de una opción delimitando la región de ejercicio anticipado. El siguiente teorema proporciona información sobre la frontera de valores críticos  $S^*(t)$  en el caso de una opción "put" americana:

**Teorema 2 - Sobre la frontera de valores críticos - "Para una opción "put" americana con vencimiento en T la frontera  $\partial\mathcal{B}$  de valores críticos es una curva  $S^*(t)$  en  $[0, T] \times [0, +\infty)$  de forma que la región  $\mathcal{R}$  de ejercicio anticipado y la región de parada  $\mathcal{B}$  se pueden caracterizar mediante:**

$$\mathcal{R} = \{(t, S) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ : (t, S) \leq (t, S^*(t))\} \quad \mathcal{B} = \{(t, S) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ : (t, S) > (t, S^*(t))\}$$

donde para cada momento  $t$  el valor  $S^*(t)$  se denomina valor crítico en dicho momento y marca una partición de  $[0, +\infty)$  en dos subconjuntos disjuntos:  $[0, S^*(t)]$  y  $(S^*(t), +\infty)$  que determinan en dicho momento si debe o no ejercerse anticipadamente la opción.

Además la función  $S^*(t): [0, T] \rightarrow [0, +\infty)$  verifica las siguientes propiedades:

1. La función  $S^*(t)$  es monótona no decreciente y continua por la derecha.

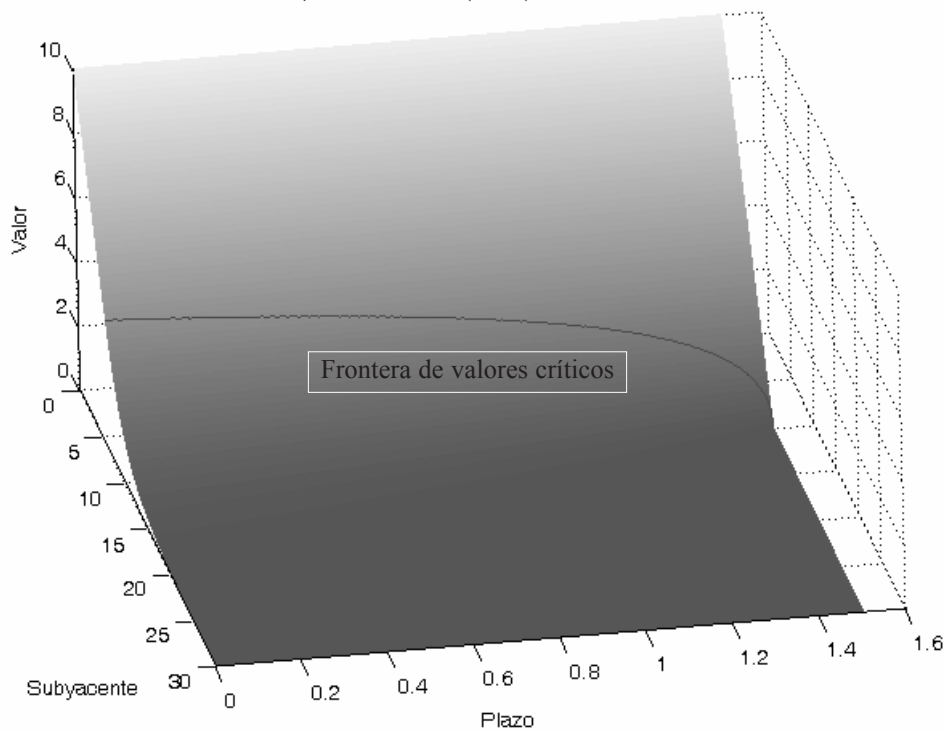
2. La función  $S^*(t)$  es continua en el intervalo  $[0, T)$ , además  $S^*(T) = K$  donde  $K$  es el "strike" y se tiene que:

$$\lim_{t \uparrow T} S^*(t) = \begin{cases} K & \text{si } d \leq r \\ \frac{r}{d} \cdot K & \text{si } r < d \end{cases}$$

donde  $d$  es el dividendo continuo de la acción y  $r$  es el tipo de interés anual.

3. Si se nota por  $S_\infty^*$  el valor crítico de la opción "put" americana perpetua con el mismo "strike" se tiene que para cualquier valor de  $t \in [0, T]$  el valor crítico  $S^*(t)$  es tal que  $S_\infty^* \leq S^*(t) \leq K$ .

**Figura 1**  
Superficie de valor opción put americana vainilla



En primer lugar se va a probar que si  $(t, \bar{S}) \in \mathcal{R}$  entonces cualquier otro punto  $(t, S)$  tal que  $S \leq \bar{S}$  es también de la región de ejercicio anticipado, o sea que:

$$(t, \bar{S}) \in \mathcal{R} \text{ y } S \leq \bar{S} \Rightarrow (t, S) \in \mathcal{R}$$

En efecto si  $(t, \bar{S}) \in \mathcal{R}$  entonces  $V_{put}(t, \bar{S}) = (K - \bar{S})^+$ , además la función  $V_{put}$  es la menor función superarmónica que domina el "pay-off" o función de retribución. Ahora bien, si construimos una función de modo que:

$$W(t, S) = \begin{cases} V_{put}(t, S) & \text{si } +\infty \geq S \geq \bar{S} \\ (K - S)^+ & \text{si } 0 \leq S < \bar{S} \end{cases}$$

Esta nueva función domina también a la función de retribución, es superarmónica pues:

$$E_{t,S}[(K - S_t)^+] = (K - S)^+$$

luego debe ser mayor que la función de valor que es la menor, o sea que si  $S \leq \bar{S}$  entonces  $(K - S)^+ \geq V_{put}(t, S)$ . Esto sólo es posible si  $V_{put}(t, S) = (K - S)^+$  lo que implica que  $(t, S) \in \mathcal{R}$ .

Es evidente que para  $t \in [0, T]$  el conjunto  $\{S \in [0, +\infty): V_{put}(t, S) = (K - S)^+\}$  está acotado superiormente por el "strike" ya que para valores del subyacente superiores al "strike" el "pay-off" es nulo y nunca será óptimo ejercer anticipadamente. Este conjunto tiene un extremo superior que se nota por  $S^*(t)$  y por lo anterior, es un intervalo de una de las dos formas siguientes:  $[0, S^*(t)]$  o  $[0, S^*(t))$ , ahora bien, como  $\mathcal{R}$  es un conjunto cerrado tiene que ser de la forma  $[0, S^*(t)]$ . En un momento dado  $t \in [0, T]$  para el conjunto de valores del subyacente  $[0, S^*(t)]$  es óptimo ejercer anticipadamente.

Por otra parte, si  $S > S^*(t)$  entonces se tiene que  $V_{put}(t, S) > (K - S)^+$  y, por consiguiente,  $(t, S) \notin \mathcal{R}$  pues de lo contrario si  $V_{put}(t, S) = (K - S)^+$  entonces  $S^*(t)$  no sería el extremo superior. Por tanto, para ningún valor del subyacente estrictamente superior a  $S^*(t)$  es óptimo ejercer anticipadamente en  $t$ .

Así queda definida una curva  $S^*(t)$  que es la frontera de valores críticos que delimita la región de ejercicio anticipado marcando la estrategia óptima de ejercicio de la opción:

$$\mathcal{R} = \{(t, S) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ : (t, S) \leq (t, S^*(t))\}$$

Vamos a demostrar ahora las propiedades de la función:

$$S^*(t) : [0, T] \rightarrow [0, +\infty)$$

Comenzando por la tercera de ellas. En efecto, para un mismo "strike"  $K$  y una misma acción una opción "put" americana perpetua permite lo que cualquier opción "put" americana con vencimiento finito en  $T$ , es decir, en cualquier momento antes de  $T$  el "pay-off" de la perpetua es igual (por consiguiente mayor o igual) que el "pay-off" de la opción "put" americana con vencimiento en  $T$ . Por consiguiente, las funciones valor que son las menores funciones superarmónicas que dominan las funciones de "pay-off" deben verificar que:

$$V_{put \text{ perpetua}}(S) \geq V_{put}(t, S) \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall S \in [0, +\infty)$$



En particular esto será cierto para  $S^*(t)$  valor crítico en  $t$  del subyacente para la opción "put" con vencimiento en  $T$ , luego:

$$V_{put\ perpetua}(S^*(t)) \geq V_{put}(t, S^*(t)) = K - S^*(t)$$

Esto quiere decir que  $S_\infty^* \leq S^*(t)$  donde  $S_\infty^*$  es el valor crítico del subyacente para la opción "put" perpetua.

Por otra parte, siempre que  $S(t) > K$  no será óptimo ejercer anticipadamente, de donde el valor crítico correspondiente al momento  $t$  verificará que  $S^*(t) \leq K$ . O sea, que en cualquier momento  $S_\infty^* \leq S^*(t) \leq K$ , con esto queda demostrada la tercera propiedad.

Ahora la primera propiedad. En efecto, entre dos opciones "put" americanas sobre la misma acción y con el mismo "strike" siempre tienen mayor valor la que tienen un plazo remanente mayor y, como la función de "pay-off" es la misma para ambas, cuando la de menor plazo alcance su valor crítico y tome un valor igual al "pay-off" la de mayor plazo tendrá un valor superior al "pay-off" y, por lo tanto, su valor crítico será inferior al valor crítico de la otra.

Dicho con otras palabras, la curva  $S^*(t)$  frontera de valores críticos es monótona no decreciente. Para completar la primera propiedad falta demostrar que  $S^*(t)$  es continua por la derecha, es decir que si  $t_n \downarrow t$  cuando  $n \rightarrow \infty$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} S^*(t_n) = S^*(t)$ .

En efecto, el hecho de que la frontera sea monótona creciente fuerza a que el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} S^*(t_n)$  exista pues  $\{S^*(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de números reales acotada inferiormente y tiene extremo inferior que, además, tiene que ser punto de acumulación y, por lo tanto, es el límite. Se puede notar sin imprecisiones:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S^*(t_n) = S^*(t+)$$

Por otro lado, como la región de ejercicio anticipado  $\mathcal{R}$  es cerrada y los elementos de la sucesión  $(t_n, S^*(t_n))$  son puntos de  $\mathcal{R}$ , el punto límite también pertenece a  $\mathcal{R}$ , o sea:

$$(t, S^*(t+)) \in \mathcal{R} \Rightarrow S^*(t+) \leq S^*(t)$$

Pero, además, la frontera es no decreciente entonces:

$$t \leq t_n \quad \forall n \Rightarrow S^*(t) \leq S^*(t_n) \quad \forall n \Rightarrow S^*(t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S^*(t_n) = S^*(t+)$$

Por consiguiente  $S^*(t) = S^*(t+)$  con lo que queda demostrada la continuidad por la derecha de la frontera.

Sólo falta demostrar la segunda propiedad y, para empezar, cuando  $t = T$ , es decir al vencimiento, se ejercerá la opción si y sólo si el valor del subyacente fuera estrictamente inferior al "strike" y si no se dejará expirar cobrando cero, es decir que al vencimiento el "strike" es el valor crítico  $S^*(T) = K$ .

Ahora se va a probar la continuidad de la frontera  $S^*(t)$  en  $[0, T)$  para lo cual sólo es preciso demostrar la continuidad por la izquierda, o sea que es necesario probar que el límite por la izquierda existe y es igual al valor de la función, o sea que si  $t_n$  es una sucesión monótona creciente convergente hacia  $t^* \in [0, T)$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S^*(t_n) = S^*(t^* -) = S^*(t^*)$

En efecto, la sucesión  $t_n$  es una monótona creciente y como la frontera es monótona no decreciente se tendrá que la sucesión  $S^*(t_n)$  será monótona creciente y estará acotada en cualquier caso por el "strike"  $K$ , por tanto como todo conjunto de números reales acotado superiormente debe tener un extremo superior que será un punto de acumulación y, como al ser monótona la sucesión no puede ser oscilante, debe ser el límite. Luego queda demostrado que  $S^*(t^-)$  existe.

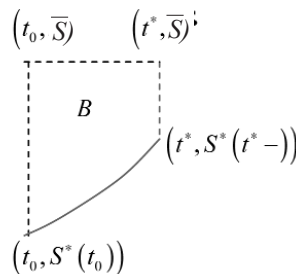
Aún falta comprobar que el límite por la izquierda es igual al valor de la frontera pero se va a demostrar que eso es así en la parte de la frontera que figure dentro de la región:

$$A = \left\{ (t, S) \in [0, T] \times [0, +\infty) : S < \frac{r}{d} K \right\}$$

En efecto, sea  $(t^*, S^*(t^*))$  y se va a probar que  $S^*(t^* -) = S^*(t^*)$  por reducción al absurdo.

Supóngase que  $S^*(t^* -) < S^*(t^*)$  es decir, que no se diera la continuidad y que en  $t^* \in [0, T)$  se produjera un salto en la frontera de valores críticos, entonces se va a considerar un momento  $t_0 < t^*$  y un subyacente  $S^*(t_0) < \bar{S} < S^*(t^*)$  y la región delimitada por abajo por la frontera y por los cuatro puntos siguientes:

**Figura 2**



Esta región  $B$ , sin incluir la frontera en rojo continuo y la línea que une  $(t^*, S^*(t^* -))$  con  $(t^*, \bar{S})$  en rojo discontinuo, verifica que  $B \subset A$  y, además, se sitúa por encima de la frontera de valores críticos de la opción "put" americana vainilla, por consiguiente está dentro de la región de continuación  $\mathcal{B}$ . Esto implica que en cualquier punto  $(t, S) \in B$  se tiene que:

$$V_{put}(t, S) > G(S) = (K - S)^+$$

Por otro lado, la función  $V_{put}(t, S)$  es de clase  $C^2$  en la región de continuación y verificará la conocida fórmula de Newton-Leibniz:

$$V_{put}(t, S) - G(S) = \int_{s^*(t)}^S \int_{s^*(t)}^u \left( \frac{\partial^2 V_{put}}{\partial S^2}(t, v) - \frac{d^2 G}{dS^2}(v) \right) dv du \quad \forall (t, S) \in B$$

$$V_{put}(t, S) - G(S) = \int_{s^*(t)}^S \int_{s^*(t)}^u \frac{\partial^2 V_{put}}{\partial S^2}(t, v) dv du \quad \forall (t, S) \in B$$

Adicionalmente es conocido que  $V_{put}(t, S)$  verifica la PDE siguiente:

$$\frac{\partial V_{put}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_{put}}{\partial S^2} + (r - d) S \frac{\partial V_{put}}{\partial S} - r \cdot V_{put} = 0$$

también se ha probado que  $\frac{\partial V_{put}}{\partial S} \leq 0$  y es muy simple demostrar que también  $\frac{\partial V_{put}}{\partial t} \leq 0$ , por consiguiente, sustituyendo se tiene:

$$\frac{\partial^2 V_{put}}{\partial S^2}(t, S) = \frac{2}{\sigma^2 S^2} \left[ r \cdot V_{put}(t, S) - (r - d) S \frac{\partial V_{put}}{\partial S}(t, S) - \frac{\partial V_{put}}{\partial t}(t, S) \right] \geq \frac{2}{\sigma^2 S^2} \left[ r(K - S)^+ + d \cdot S \frac{\partial V_{put}}{\partial S}(t, S) \right]$$

$$\frac{\partial^2 V_{put}}{\partial S^2}(t, S) \geq \frac{2}{\sigma^2 S^2} [r \cdot K - d \cdot S]$$

Pero entonces como el punto  $(t, S) \in B \subset A$ :

$$S < \frac{r}{d} K \Rightarrow r \cdot K - d \cdot S > 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V_{put}}{\partial S^2}(t, S) > \varepsilon > 0$$

y esto implicaría que en el punto  $(t_0, \bar{S}) \in B$  se tendría:

$$V_{put}(t_0, \bar{S}) - (K - \bar{S})^+ = \int_{s^*(t_0)}^{\bar{S}} \int_{s^*(t_0)}^u \frac{\partial^2 V_{put}}{\partial S^2}(t, v) dv du \geq \varepsilon (\bar{S} - S^*(t_0))$$

Haciendo que  $(t_0, \bar{S}) \rightarrow (t^*, \bar{S})$  a lo largo de la línea superior se tiene:

$$V_{put}(t^*, \bar{S}) - (K - \bar{S})^+ \geq \varepsilon (\bar{S} - S^*(t^*)) > 0$$

$$V_{put}(t^*, \bar{S}) > (K - \bar{S})^+$$

pero esto contradeciría que el punto  $(t^*, \bar{S})$  está por debajo de  $(t^*, S^*(t^*))$  y pertenece a la región de ejercicio anticipado que era parte de la hipótesis.

En consecuencia, queda demostrado que la frontera  $S^*(t)$  es continua en la región  $A = \left\{ (t, S) \in [0, T] \times [0, +\infty) : S < \frac{r}{d} K \right\}$ .

Esto puede parecer restrictivo pero no lo es, pues si  $d \leq r$  como  $K \leq \frac{r}{d} K$  abarca toda la frontera y si  $d > r$  se va a probar que toda la frontera para  $t < T$  está contenida en  $A$ .

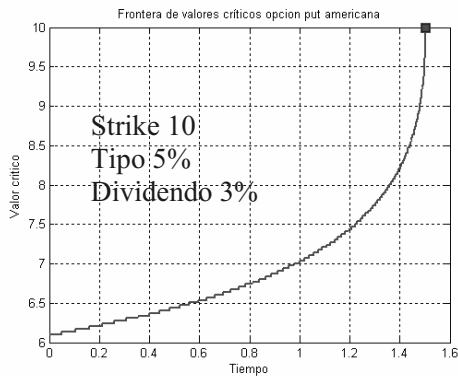
Falta demostrar que:

$$d > r \Rightarrow S^*(t) \leq \frac{r}{d} K \quad \forall t \in [0, T)$$

y que  $\lim_{t \uparrow T} S^*(t) = S^*(T-) = \frac{r}{d} K < K$

La demostración de estos dos resultados es compleja y requiere métodos del Cálculo de Variaciones, puede seguirse en [10] Karatzas & Shreve *"Methods of Mathematical Finance"* Proposición 7.10 c.q.d.

Los dos casos que se pueden presentar en las fronteras de las opciones "put" vainilla americanas dependiendo de la comparación entre el dividendo y el tipo de interés libre de riesgo gráficamente son los siguientes:



Las propiedades de la frontera de valores críticos  $S^*(t)$  para una opción "put" vainilla americana han sido estudiadas por muchos autores durante mucho tiempo. Los avances en el conocimiento de la frontera han estado jalonados de resultados que contenían sutiles errores en las demostraciones, por ello la consulta de algunos papeles antiguos debe hacerse con precaución. Entre otros papeles que abordan este tema destacan [3], [4], [11] y [12].

Apelando a los papeles de McKean [11] y de van Moerbeke [12], Myneni afirma que  $S^*(t)$  es una función de clase  $C^1$ , es decir que  $S^*(t)$  es una curva continua y diferenciable, pero las pruebas dadas tienen lagunas y, que se sepa, de momento lo que puede afirmarse es lo que se dice en el teorema anterior. No existe demostración completa de la diferenciable de la frontera.

## 2 - Relación de simetría "put-call" para opciones americanas.

Es conocida la relación de paridad para las opciones "put" y "call" europeas sobre acciones que vincula las funciones de valor de ambas:

$$V_{call\ europea}(t,S) - V_{put\ europea}(t,S) = S - K \cdot e^{-r \cdot (T-t)}$$

Entre las opciones europeas, la relación de paridad hace que el problema de valoración de los dos tipos de opciones se convierta en uno solo. Si se dispone de una fórmula explícita o algoritmo para valorar uno de los dos tipos de opciones, la valoración del otro tipo se puede realizar aplicando la relación de paridad.

Desafortunadamente esta utilísima relación no es aplicable para las opciones americanas vainilla, no obstante, se conocen otras relaciones entre opciones "call" y "put" vainilla americanas que, aunque no se refieren a opciones sobre el mismo subyacente, con el mismo "strike" y con los mismos parámetros, sin embargo, permiten establecer una relación de dualidad uno a uno entre los problemas americanos "put" vainilla y "call" vainilla, de forma que la solución de un problema "put" coincide con la solución del problema "call" dual.

La relación de simetría que se va a describir aquí se debe a Petter Bjerksund & Gunnar Stensland en su breve pero interesante artículo "American Exchange Options and a Put-Call Transformation" 1993 *Journal of Business, Finance and Accounting* Vol. 20. Bjerksund & Stensland demuestran de manera muy sencilla y elegante en su papel que:

$$V_{call}(t,T,S_p,K,\sigma,r,d) = V_{put}(t,T,K,S_p,\sigma,d,r)$$

Es decir, que el valor en cualquier momento  $t \leq T$  de una opción "call" americana con vencimiento en  $T$  y "strike"  $K$  sobre un subyacente  $S$  que sigue un GBM con volatilidad  $\sigma$ , pagando un dividendo continuo  $d$ , en un mercado financiero cuyo tipo de interés libre de riesgo es  $r$ , es igual que el valor en ese mismo momento  $t \leq T$  de una opción "put" americana con vencimiento en  $T$  y "strike"  $S_t$  sobre otro subyacente virtual cuyo valor actual sea  $K$  y siga un GBM con volatilidad  $\sigma$ , pagando un dividendo  $r$  en un mercado financiero cuyo tipo de interés libre de riesgo sea  $d$ .

En 1999 J. Detemple publica "American Options: Symmetry Properties" [7] en la que se demuestra una interesante relación entre los valores críticos de ambas opciones.

Si se notan  $P^*(t)$  al valor crítico en  $t$  de la opción "put" americana caracterizada por:

"Strike":	$S$
Volatilidad:	$\sigma$
Tipo interés	$d$
Dividendo	$r$
Vencimiento	$T$

y por  $C^*(t)$  al valor crítico en de la opción "call" vainilla americana caracterizada por:

"Strike":	$K$
Volatilidad:	$\sigma$

Tipo interés	$r$
Dividendo	$d$
Vencimiento	$T$

entonces  $P^*(t) \cdot C^*(t) = S \cdot K$

El resultado es aparentemente sencillo, su demostración es compleja, puede seguirse en el artículo de Detemple.

La fórmula permite establecer las propiedades de la frontera de valores críticos de una opción "call" americana a partir de las ya vistas para una opción "put" americana.

### 3 - Call americano

Se considera una opción "call" americana con vencimiento en  $T$  y "strike"  $K$  sobre la acción  $S$ . Esta opción puede ser considerada por el comprador un juego que expira en  $T$ , pero puede detener en cualquier momento ejerciendo su derecho a percibir un "pay-off" determinado: la función de retribución  $G_{call}(t, S) = (S - K)^+$ , también entra dentro de las atribuciones del comprador de esta opción dejar que expiren sus derechos sin reclamar el "pay-off" al vencimiento.

No se puede afirmar que  $(S_T - K)^+$  esté acotado superiormente como sucedía con la función de retribución de las opciones "put" americanas, ahora bien sí se pueden dar acotaciones en términos de valor esperado en horizonte finito. En efecto:

$$E_{0, S_0} \left[ (S_t - K)^+ \right] \leq K + E_{0, S_0} [S_t] \leq K + E_{0, S_0} \left[ S_0 \cdot e^{\sigma W_t + \left(r - d - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \right] = K + S_0 \cdot e^{\left(r - d - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \leq K + S_0 \cdot e^{\left(r - d - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}$$

Luego:

$$E_{0, S_0} \left[ (S_\tau - K)^+ \right] \leq K + S_0 \cdot e^{\left(r - d - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau} \quad \forall \tau \text{ tiempo de parada}$$

$$\sup_{\tau \leq T} E_{0, S_0} \left[ (S_\tau - K)^+ \right] \leq K + S_0 \cdot e^{\left(r - d - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}$$

La acotación anterior es buena pero en realidad el problema de la opción "call" americana con vencimiento finito es un problema descontado de parada óptima. El valor de la opción "call" americana con vencimiento finito vendrá dado por:

$$V_{call}(t, S) = \sup_{\tau \leq T-t} E_{t, S} \left[ e^{-r\tau} \cdot (S_{t+\tau} - K)^+ \right]$$

La función valor está definida y toma un valor finito para cada par  $(t, S)$  porque el conjunto de posibles valores que tome  $E_{t, S} \left[ e^{-r\tau} \cdot (S_{t+\tau} - K)^+ \right]$  para todos los tiempos de parada que verifiquen  $\tau \leq T - t$  está acotado superiormente luego tiene que existir su extremo superior, es decir, existe  $V_{call}(t, S)$ .

Al vencimiento de la opción la estrategia óptima es evidente se ejercerá si y sólo si la retribución que se obtendría fuese positiva y el valor de la opción coincide con el "pay-off", o sea:

$$V_{call}(T, S) - (S - K)^+$$

La existencia de  $V_{call}(t, S)$  menor función superarmónica que domina a la función de retribución por el Teorema 1 es condición necesaria y suficiente para que exista un tiempo óptimo de parada que viene determinado por la región de ejercicio anticipado:

$$\mathcal{R} = \{(t, S) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ : V_{call}(t, S) = (S - K)^+\} \quad \tau_{t, \mathcal{R}} = \inf \{s \geq 0 : (t + s, S_{t+s}) \in \mathcal{R}\}$$

Con la estrategia dada por el tiempo de parada óptimo se tiene una nueva expresión para el valor de la opción "call" americana tanto en la región de ejercicio anticipado en cuyo caso  $\tau_{t, \mathcal{R}} = 0$  como fuera de ella (región de continuación):

$$V_{call}(t, S) = E_{t, S} \left[ e^{-r \cdot \tau_{t, \mathcal{R}}} \cdot (S_{t+\tau_{t, \mathcal{R}}} - K)^+ \right]$$

Al igual que para la opción "put" en el caso de la opción "call" no puede esperarse computar el valor de la opción por aplicación de la fórmula anterior porque requeriría conocer la función de densidad de probabilidad del primer contacto con el conjunto  $\mathcal{R}$  partiendo de  $(t, S)$ . La forma de abordar el problema en la práctica es diferente. Si se supone conocida la frontera  $\partial \mathcal{B}$  el problema de la opción "call" americana es equivalente al problema siguiente:

$$\frac{\partial V_{call}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_{call}}{\partial S^2} + (r - d) S \frac{\partial V_{call}}{\partial S} - r \cdot V_{call} = 0 \quad \text{PDE}$$

$$\text{en la región de continuación } \mathcal{B} = \{(t, S) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ : (t, S) < (t, S^*(t))\}$$

$$V_{call}(T, S) = (S - K)^+ \quad \forall S \in \mathbb{R}^+ \quad \text{Condición final}$$

$$V_{call} \Big|_{\partial \mathcal{B}} = (S - K)^+ \Big|_{\partial \mathcal{B}} \quad \text{Condiciones de contorno}$$

donde las incógnitas son las funciones  $V_{call}(t, S)$  y  $\partial \mathcal{B}$  que va a ser una curva  $S^*(t)$ .

Dado el valor final  $(S - K)^+$  es continuo y no depende del tiempo, y como se busca una función de valor positiva, el problema parabólico anterior con su efecto regularizante tiene solución única  $V_{call}(t, S)$  de clase  $C^2(\mathcal{B})$  en la región de continuación, no necesariamente en la frontera ni al vencimiento.

Del mismo modo que se hizo para las opciones "put" vainilla americanas en el caso de las opciones "call" se puede demostrar que la función de valor verifica la condición de contacto suave ("smooth fit"), es decir que:

$$\frac{\partial V_{call}(t, S)}{\partial S} \Big|_{(t, S) = (t, S^*(t))} = \frac{\partial (S - K)^+}{\partial S} \Big|_{(t, S) = (t, S^*(t))} = 1$$

También para cualquier valor de  $t \in [0, T]$  la aplicación parcial  $S$  a  $V_{call}(t, S)$  es no decreciente convexa y  $\frac{\partial V_{call}(t, S)}{\partial S} \in [0, 1]$ . Para un tiempo fijo el valor de la opción "call" americana vainilla

como función del subyacente es creciente, convexa y la delta de la opción está entre 0 y 1. La demostración de esto es semejante a la que se realizó para la opción "put"

La función  $V_{call}(t, S)$  solución del problema de Dirichlet está definida solamente en la región de continuación  $\mathcal{B}$ . En la región de ejercicio anticipado  $\mathcal{R}$  se extiende la definición de la función de valor mediante  $V_{call}(t, S) = (S - K)^+$ .

Las propiedades de la frontera de valores críticos  $S^*(t)$  para la opción "call" americana que se van a enunciar en el siguiente teorema son consecuencia del teorema 2 para las opciones "put" y de la relación de simetría  $S_{put}^*(t) \cdot S_{call}^*(t) = S \cdot K$

Teorema 3 - "Para una opción "call" vainilla americana con vencimiento en T la frontera  $\partial\mathcal{B}$  de valores críticos es una curva  $S^*(t)$  en  $[0, T] \times [0, +\infty)$  de forma que la región  $\mathcal{R}$  de ejercicio anticipado y la región de parada  $\mathcal{B}$  se pueden caracterizar mediante:

$$\mathcal{R} = \{(t, S) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ : (t, S) \geq (t, S^*(t))\}$$

$$\mathcal{B} = \{(t, S) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ : (t, S) < (t, S^*(t))\}$$

donde para cada momento  $t$  el valor  $S^*(t)$  se denomina valor crítico en dicho momento y marca una partición de  $[0, +\infty)$  en dos subconjuntos disjuntos:  $[S^*(t), +\infty)$  y  $[0, S^*(t))$  y que determinan en dicho momento, si debe o no ejercerse anticipadamente la opción.

Además la función  $S^*(t): [0, T] \rightarrow [0, +\infty)$  verifica las siguientes propiedades:

1. La función  $S^*(t)$  es monótona no creciente y continua por la derecha.
2. La función  $S^*(t)$  es continua en el intervalo  $[0, T)$ , además  $S^*(T) = K$  donde  $K$  es el "strike" y se tiene que:

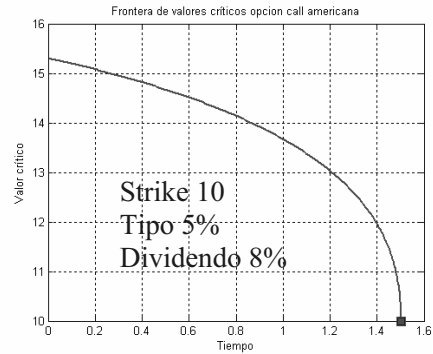
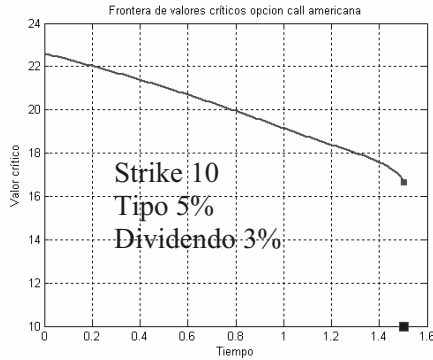
$$\lim_{t \uparrow T} S^*(t) = \begin{cases} K & \text{si } d \geq r \\ \frac{r}{d} \cdot K & \text{si } d < r \end{cases}$$

donde  $d$  es el dividendo continuo de la acción y  $r$  es el tipo de interés anual.

3. Si se nota por  $S_\infty^*$  el valor crítico de la opción "call" americana perpetua con el mismo "strike" se tiene que para cualquier valor de  $t \in [0, T]$  el valor crítico  $S^*(t)$  es tal que  $K \leq S^*(t) \leq S_\infty^*$ .

Los dos casos que se pueden presentar en las fronteras de las opciones "call" vainilla americanas dependiendo de la comparación entre el dividendo y el tipo de interés libre de riesgo gráficamente son los siguientes:





#### 4. PROCEDIMIENTOS NUMÉRICOS PARA VALORACIÓN DE OPCIONES AMERICANAS

No se conoce solución explícita para la función de valor ni para los valores críticos de opciones americanas "call" o "put" con vencimiento finito, sí existen fórmulas explícitas para las opciones perpetuas. La expresión:

$$V_{put}(t, S) = E_{t,S} \left[ e^{-r \cdot \tau_{t,\beta}} \cdot (K - S_{t+\tau_{t,\beta}})^+ \right] = \sup_{\tau \leq T-t} E_{t,S} \left[ e^{-r \cdot \tau} \cdot (K - S_{t+\tau})^+ \right]$$

que representa la solución del problema de parada óptima no permite un cálculo sencillo del valor numérico, porque no es fácil obtener la función de densidad necesaria para computar este valor esperado. Se ha podido reducir la solución del problema de parada óptima a un problema de frontera libre que admite tratamiento numérico y que en el caso de la opción "put" americana era:

$$\frac{\partial V_{put}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_{put}}{\partial S^2} + (r-d) S \frac{\partial V_{put}}{\partial S} - r \cdot V_{put} = 0 \quad \text{PDE}$$

$$\text{en la región de continuación } \mathcal{B} = \{(t, S) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ : (t, S) > (t, S^*(t))\}$$

$$\left. \begin{aligned} V_{put}(T, S) &= (K - S)^+ & \forall S \in \mathbb{R}^+ & \text{Condición final} \\ V_{put}(t, S^*(t)) &= K - S^*(t) \\ \lim_{S \rightarrow +\infty} V_{put}(t, S) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{Condiciones de contorno}$$

donde las incógnitas son las funciones  $V_{put}(t, S)$  y  $S^*(t)$ .

Los procedimientos numéricos que se van a ver son de dos tipos: diferencias finitas y algoritmo binomial. Los métodos de diferencias finitas atacan el problema de frontera libre anterior por vías analíticas mientras que el algoritmo binomial tiene un enfoque probabilístico.

Cada método tiene sus ventajas e inconvenientes sin que pueda defenderse alguno de ellos como superior a los demás en todos los casos. La principal diferencia radica en la eficiencia, si se desea una única valoración de una opción para unos parámetros específicos, el algoritmo binomial es el más adecuado. Ahora bien, si se necesita un gráfico con valores de la misma opción para diferentes valores del subyacente o del tiempo es mejor el uso de diferencias finitas ya que con ellas se obtiene toda la superficie de valor de una sola vez.

### 1 - Valoración numérica mediante diferencias finitas.

En primer lugar, no debe hablarse de diferencias finitas como si se tratase de un único procedimiento sino de una familia de métodos que resuelven una ecuación diferencial ordinaria, o en derivadas parciales, en un retículo de nodos que rellena el dominio de la solución. Se sustituye la ecuación diferencial, y las condiciones de contorno, por sistemas de ecuaciones lineales que al resolverse dan aproximaciones a la función solución en los nodos del retículo. Después, la función solución en el interior del dominio, en puntos que no sean del retículo, se computa mediante algún procedimiento de interpolación.

Lo anterior es común a todos los métodos de diferencias finitas. Entre ellos se distinguen por cómo se aproximan las derivadas mediante derivación numérica y en cómo se abordan las condiciones de contorno.

En los problemas de valoración de opciones siempre se va a tener que considerar el primer cuadrante del plano tiempo - subyacente, conjunto de puntos  $(t, S)$  con  $t \geq 0$  y  $S \geq 0$ ,  $t$  son las abscisas y  $S$  las ordenadas. Se conviene que  $t$  crece hacia la derecha y  $S$  crece hacia abajo. La razón de elegir los sentidos de este modo es para que se visualicen los valores de  $V(t, S)$  como si se tratara de una matriz.

El dominio donde debe resolverse el problema es  $[0, T] \times [0, +\infty)$  pero para que pueda discretizarse se sustituye por un dominio acotado  $[0, T] \times [0, S_{\max}]$  donde  $[0, S_{\max}]$  se va a elegir de forma que la frontera de valores críticos  $S^*(t)$  esté incluida, o sea que:

$$\{(t, S^*(t)) : t \in [0, T]\} \subset [0, T] \times [0, S_{\max}]$$

Si la opción es "call" es suficiente elegir  $S_{\max}$  con el criterio anterior ya que estará incluida toda la región de continuación  $\mathcal{B} = \{(t, S) \in [0, T] \times [0, +\infty) : (t, S) < (t, S^*(t))\}$  y, por consiguiente, fuera del rectángulo o se está fuera de la banda temporal de definición o se está en la región de parada óptima, donde el valor de la opción coincide con el "pay-off". No tiene importancia que parte de la región de ejercicio anticipado quede en el interior del rectángulo porque, a priori, no se conoce la frontera.

Si la opción es "put" debe elegirse  $S_{\max}$  suficientemente grande de forma que para valores del subyacente mayores el valor de la opción sea numéricamente nulo. En la práctica 4 o 5 veces el valor del "strike" de la opción suele ser suficiente. En este caso, toda la región de ejercicio anticipado  $\mathcal{R}$  estará dentro del rectángulo lo que no representa problemas, a pesar de que el valor de la opción en estos puntos es el "pay-off". Por el contrario, una parte de la región de continuación  $\mathcal{B}$  se ubicará fuera del rectángulo pero en esa zona el valor de la opción será numéricamente nulo.

Sólo en el caso de una opción "call" americana sobre una acción que no paga dividendos no sería posible incluir en un rectángulo acotado como  $[0, T] \times [0, S_{\max}]$  toda la frontera  $S^*(t)$  de valores críticos. Para esta opción toda la frontera de valores críticos está en el infinito o, dicho de otro modo, nunca es óptimo ejercer anticipadamente y la región de continuación llena la semibanda  $[0, T] \times [0, +\infty)$  pero este caso puede valorarse mediante las funciones explícitas de B & S. En los otros casos la función de valor de estas opciones verifica el problema:

$$\frac{\partial V_{call}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_{call}}{\partial S^2} + (r - d) S \frac{\partial V_{call}}{\partial S} - r \cdot V_{call} = 0 \quad \text{PDE}$$

en la región  $[0, T] \times \mathbb{R}^+$

$$\left. \begin{array}{l} V_{call}(T, S) = (S - K)^+ \quad \forall S \in \mathbb{R}^+ \quad \text{Condición final} \\ V_{call}(t, 0) = 0 \\ \lim_{S \rightarrow +\infty} V_{call}(t, S) = +\infty \end{array} \right\} \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{Condiciones de contorno}$$

Cualquier algoritmo numérico para las opciones "call" sólo debe considerar el caso de que el dividendo sea estrictamente positivo y, por lo tanto, la frontera de valores críticos estará acotada.

Para la discretización o construcción del retículo de nodos se divide  $[0, T]$  en  $n - 1$  intervalos iguales cuya duración es  $\delta t = \frac{T}{n}$  y también se divide  $[0, S_{\max}]$  en  $m - 1$  subintervalos iguales, de forma que se disponga de un cuadrado con  $m \times n$  nodos. Sea  $\delta S = \frac{S_{\max}}{m - 1}$ .

El índice  $j$  recorrerá el conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  de modo que señale los tiempos  $(j - 1) \cdot \delta t$  correspondientes a los nodos de la  $j$ -ésima columna desde  $t = 0$  hasta  $t = T$ . El índice  $i$  recorrerá el conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, m\}$  de modo que señale el valor del subyacente  $(i - 1) \cdot \delta S$  correspondientes a los nodos de la fila  $i$ -ésima contada de arriba para abajo como en las matrices, desde  $S = 0$  hasta  $S = S_{\max}$ .

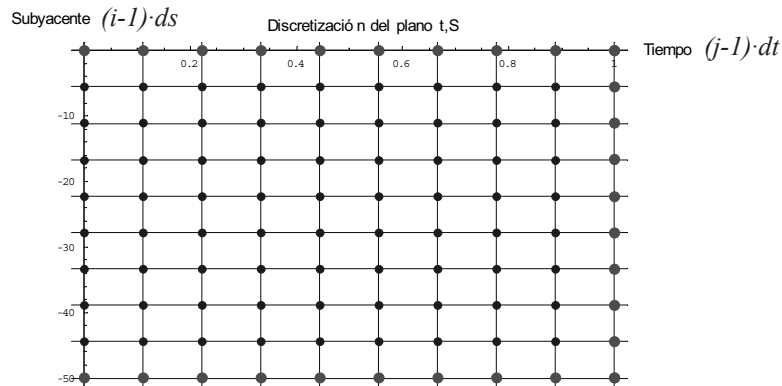
A cada par de índices  $i, j$  se le asocia el nodo  $((j - 1) \cdot \delta t, (i - 1) \cdot \delta S)$  y a dicho nodo se le asocia el valor de la opción:

$$\begin{aligned} V_{i,j} &= V((j-1) \cdot \delta t, (i-1) \cdot \delta S) \\ V(0,0) &= V_{1,1} & V(T,0) &= V_{1,n} \\ V(0,S_{\max}) &= V_{m,1} & V(T,S_{\max}) &= V_{m,n} \end{aligned}$$

En los casos correspondientes a las opciones americanas vainilla tanto "put" como "call" se conoce de antemano el valor de la opción en los nodos que corresponden a  $t = T$  por la condición final que iguala el valor de la opción al "pay-off".

También se conoce el valor de la opción para  $S = 0$  que será 0 para las opciones "call" y el "strike" para las opciones "put". Del mismo modo, para  $S = S_{\max}$  tal y como se ha elegido  $S_{\max}$

el valor de la opción será el "pay-off" para las opciones "call" y 0 para las opciones "put". Es decir, de antemano se conoce el valor de la función de valor en los nodos de color gris más claro y se desconoce en los nodos de color gris más oscuro:



En cualquiera de los procedimientos de diferencias finitas se realiza el cálculo del valor de la opción en los nodos azules de modo distinto en cada uno de ellos.

Todos los procedimientos se basan en plantear ecuaciones lineales que relacionen los valores de la opción en los diferentes nodos que se obtienen de sustituir en la ecuación en derivadas parciales las derivadas por aproximaciones numéricas. Existen tres formas básicas de aproximar una derivada numéricamente: diferencias progresivas, diferencias regresivas y diferencias centrales.

Diferencias progresivas

$$\frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\delta S}$$

Diferencias regresivas

$$\frac{V_{i,j} - V_{i-1,j}}{\delta S}$$

Diferencias centrales

$$\frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\delta S}$$

En los tres casos lo que se pretende es estimar el valor de la derivada en el mismo nodo:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial S} \right|_{i,j} = \frac{\partial V}{\partial S}((j-1) \cdot \delta t, (i-1) \cdot \delta S)$$

A partir del desarrollo en serie de Taylor de la función  $V(t,S)$  se puede comprobar que las diferencias centrales tienen una precisión del orden  $O(\delta S^2)$ , es decir, que la diferencia entre la verdadera derivada y la estimada mediante diferencias centrales es del mismo orden que el cuadrado de  $\delta S$  y, por lo tanto, el error decrece muy rápidamente cuando el retículo se va haciendo más tupido. Las diferencias progresivas y regresivas son de orden  $O(\delta S)$ , son menos precisas que las diferencias centrales. Lógicamente, cuando  $\delta S$  es pequeño su cuadrado es mucho más pequeño.

$$\left. \frac{\partial V}{\partial S} \right|_{i,j} = \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\delta S} + O(\delta S) \quad \left. \frac{\partial V}{\partial S} \right|_{i,j} = \frac{V_{i,j} - V_{i-1,j}}{\delta S} + O(\delta S) \quad \left. \frac{\partial V}{\partial S} \right|_{i,j} = \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\delta S} + O((\delta S)^2)$$

El uso de las diferencias centrales es más preciso, pero requiere conocer los valores de la función en  $S + \delta S$  y en  $S - \delta S$ , lo que no siempre es posible, por ejemplo para la derivada parcial temporal en el vencimiento.

Para la derivada segunda la mejor aproximación viene dada por:

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right|_{i,j} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} ((j-1) \cdot \delta t, (i-1) \cdot \delta S) = \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{(\delta S)^2} + O((\delta S)^2)$$

En el caso de la derivada temporal no se utilizan diferencias centrales sino progresivas o regresivas:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{i,j} = \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\delta S} + O(\delta t) \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{i,j} = \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\delta S} + O(\delta t)$$

Ahora se trata de sustituir las derivadas numéricas que se elijan en la ecuación en derivadas parciales en los nodos:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-d) S \frac{\partial V}{\partial S} - r \cdot V = 0$$

Dependiendo de las aproximaciones numéricas elegidas se obtendrán ecuaciones lineales diferentes que conducirán al cómputo de la función de valor en todos los nodos. Al conjunto de todas las relaciones lineales a las que se llega por la aplicación en todos los nodos del retículo de la ecuación en diferencias que se obtiene, más las condiciones final y de contorno discretas se le denomina sistema de diferencias finitas para el problema planteado.

Es posible que las relaciones permitan fórmulas explícitas para elementos de la cuadrícula a partir de otros conocidos, por ejemplo regresando en el tiempo a partir de las condiciones finales, entonces se tiene un método explícito. Otras veces las relaciones de que se dispone fuerzan a resolver sistemas lineales para ir rellenando la cuadrícula. Esto es lo que se conoce como métodos implícitos. Son preferibles por su sencillez los procedimientos explícitos pero suelen ser menos precisos y menos estables.

Las diferencias finitas se han utilizado en Física e Ingeniería para la resolución de problemas de Dirichlet convencionales con ecuaciones en derivadas parciales parabólicas directas y retrógradas como la que se plantea en las opciones desde hace dos siglos. Por ello existe todo un arsenal de algoritmos bien conocidos teórica y empíricamente.

No obstante, el caso de las opciones vainilla americanas es diferente porque no es un problema de Dirichlet convencional, aquí se conoce el valor de la función de valor en la frontera pero ... se desconoce la frontera, de hecho la determinación de la frontera es parte de la solución del problema. A pesar de esto, las diferencias en la práctica entre los algoritmos de valoración con diferencias finitas de opciones americanas y los mismos aplicados a opciones europeas son pequeñas y sutiles.

Las modificaciones a los diferentes métodos de diferencias finitas que existen para la resolución de problemas de frontera libre con PDE parabólicas retrógradas de modo que se adapten a la resolución del problema asociado con una opción americana fueron propuestas por Michael J. Brennan y Eduardo S. Schwartz en su papel "*On the valuation of the American put option*", *Journal of Finance*, 32 de 1977. En principio, el fundamento riguroso de lo que proponían era escaso, pero el algoritmo era simple e intuitivo. Más tarde se demuestra que el procedimiento está soportado teóricamente con todo rigor por Patrick Jaillet, Damien Lamberton y Bernard Lapeyre en su papel "*Variational inequalities and the pricing of American options*" *Acta Appl. Math.* 21 de 1990.

Brennan & Schwartz proponen que en cualquier método de la familia de diferencias finitas que se utilice para la valoración de una opción "put" americana, después del cálculo del valor de la opción en un nodo o conjunto de nodos del retículo, se debe comparar el valor preliminar computado con el "pay-off" que correspondería a dicho nodo si la opción fuera ejercida anticipadamente en dicho punto, de la comparación se toma como valor definitivo el mayor de los dos.

Esto equivale a implementar en los nodos del retículo la propiedad de que el valor de una opción americana nunca puede ser inferior al "pay-off" porque de lo contrario existirían oportunidades de arbitraje comprando la opción y ejerciéndola de inmediato. Parece demasiado simple, casi ridículo que aplicando en cada nodo algo como:

$$V_{i,j} = \max(V_{i,j}, \max(K - S_i, 0))$$

se obtenga la resolución numérica del problema de frontera libre, sin embargo es así. No obstante, es preciso recalcar que, como los métodos de diferencias finitas se aplican hacia atrás en el tiempo, esta fórmula debe hacerse de modo que afecte a todos los valores anteriores.

Lo deseable es que este sistema de diferencias finitas converja hacia la solución exacta del problema principal  $V(t,S)$  conforme la discretización se va haciendo más densa, de tal manera que la solución exacta pueda ser aproximada tanto como se desee.

Existe un resultado fundamental sobre la convergencia de un sistema de diferencias finitas que se denomina Teorema de Lax y establece que la condición necesaria y suficiente para que un sistema de diferencias finitas converja hacia la solución verdadera es que sea consistente y estable.

Un sistema se dice que es consistente si las diferencias entre los valores exactos correspondientes a los nodos y los valores calculados mediante el sistema de diferencias finitas tienden hacia cero cuando el retículo se va haciendo cada vez más denso. Esto no es difícil de comprobar pues si las ecuaciones lineales que conforman el sistema de diferencias finitas tienen un error que tiende a cero al hacerse más denso el retículo, entonces el sistema será consistente. Por consiguiente, en general si se han sustituido en la ecuación en derivadas parciales las derivadas parciales por las aproximaciones numéricas que se han comentado, pasando todos los términos de error al segundo miembro de la ecuación, éste se reducirá a un  $O(\delta t, (\delta S)^2)$  o a un  $O(\delta t, \delta S)$ . En ambos casos, la consistencia está garantizada. Los valores computados de la opción en los nodos convergen hacia los valores correctos de la opción en los nodos cuando el retículo se hace más denso.

A los efectos del Teorema de Lax, por estabilidad de un sistema de diferencias finitas se entiende que para algún esquema de anchuras de partición cada vez más finas la solución está acotada. No es preciso que se dé esta circunstancia para cualquier elección de los pasos  $\delta t$ ,  $\delta S$ , sino que determinada selección permita ir disminuyendo el tamaño de los pasos y obteniendo siempre soluciones acotadas. En este caso, el sistema planteado es condicionalmente estable, es decir la selección de  $\delta t$ ,  $\delta S$  debe realizarse con cuidado para que no se obtengan soluciones no acotadas.

Todos los sistemas de diferencias finitas que se van a describir verifican el Teorema de Lax, son consistentes y condicionalmente estables, por consiguiente, convergen a la solución real conforme el retículo se va haciendo más denso.

Una vez que se conoce la función de valor  $V_{put}(t,S)$  en una región como  $[0,T] \times [0,S_{max}]$  que contiene la frontera de valores críticos  $S^*(t)$  es muy sencillo calcular y representar gráficamente dicha curva basándose en que:

$$V_{put}(t, S^*(t)) = K - S^*(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

Partiendo del intervalo  $[0,T]$  discretizado, para cada valor de  $j$  es decir, para cada valor del tiempo  $(j - 1) \cdot dt$  desde  $j = 1$  hasta  $j = n$ , se recorren los nodos de las columnas, o sea se va variando  $i$  desde  $i = 1$  que corresponde a  $S = 0$  hasta  $j = n$  que corresponde a  $S = S_{max}$ . En cada nodo de la columna que se esté procesando se evalúan  $V_{i,j}$  valor de la opción y  $\max(K - (i - 1) \cdot dS, 0)$  que es el "pay-off" que correspondería en dicho nodo. En principio, en los primeros nodos de cada columna: 1,2,3,... ambos valores serán iguales pues dichos nodos deben corresponder a la región de ejercicio anticipado. Lo que debe buscarse es el primer nodo de la columna en el que eso deje de ocurrir y tomar dicho nodo como aproximación de la frontera, es decir si dicho nodo corresponde a  $i^*(j)$  se toma  $S^*((j-1) \cdot dt) = (i^*(j)-1) \cdot dS$ .

Repitiendo este procedimiento para todos los valores de  $j \in \{1,2,\dots,n\}$  se tiene evaluada discretamente la frontera que después puede aproximarse por una función de interpolación. Obviamente, el procedimiento de cómputo de la frontera es más preciso cuanto más denso sea el retículo de nodos con el que se ha recubierto  $[0,T] \times [0,S_{max}]$ .

Para el caso de las opciones "call" americanas el procedimiento para el cálculo de la frontera es similar con la diferencia de que en cada columna deben recorrerse los nodos de arriba abajo.

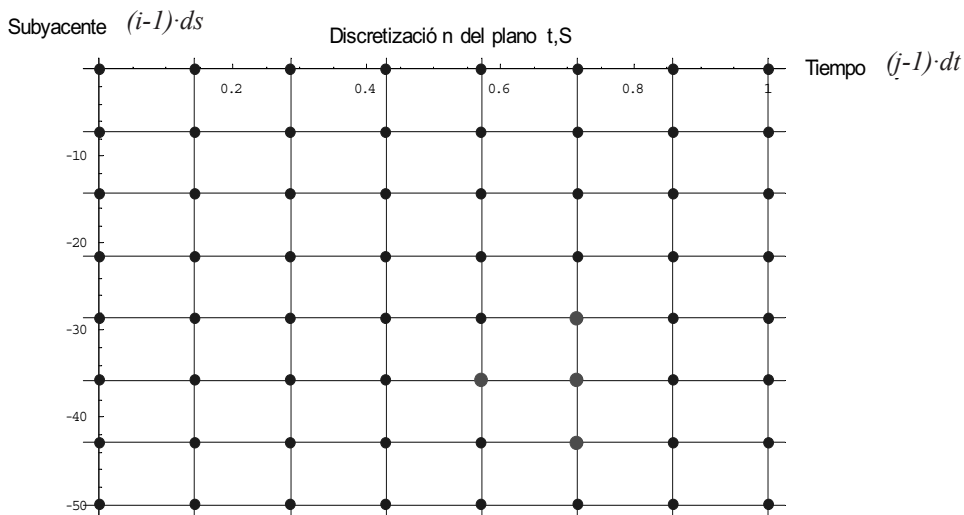
Se van a describir tres métodos diferentes de diferencias finitas para la resolución del problema de frontera libre de las opciones americanas, siempre se describen para el caso de una opción "put" pero el caso de una "call" sería análogo. De todos los procedimientos se pueden obtener de las páginas de Estrategia Financiera los programas en MatLab correspondientes, tanto para opciones "put" como para opciones "call" americanas. Los métodos se denominan explícito, implícito y Crank Nicolson.

## 2 - Diferencias finitas explícitas

Partiendo de la PDE, sustituyendo las derivadas parciales respecto del subyacente por diferencias centrales y la derivada respecto del tiempo por la diferencia regresiva, se obtiene:

$$\frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 (i-1)^2 (\delta S)^2 \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{(\delta S)^2} + (r-d)(i-1) \delta S \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\delta S} - rV_{i,j} = O(\delta t, (\delta S)^2)$$

Esta ecuación lineal involucra cuatro nodos del plano discretizado tal y como aparecen en el gráfico. Cualquiera de ellos puede expresarse en función de los demás.



A partir de la ecuación anterior simplificando, operando y notando:

$$A_i = \frac{1}{2} \sigma^2 (i-1)^2 \delta t - \frac{1}{2} (r-d)(i-1) \delta t$$

$$B_i = 1 - r\delta t - \sigma^2 (i-1)^2 \delta t$$

$$C_i = \frac{1}{2} \sigma^2 (i-1)^2 \delta t + \frac{1}{2} (r-d)(i-1) \delta t$$

donde los coeficientes dependen solo de  $i$ , es decir de  $S$  pero no de  $j$  o sea no depende del tiempo, se llega a la fórmula:

$$V_{i,j-1} = A_i \cdot V_{i-1,j} + B_i \cdot V_{i,j} + C_i \cdot V_{i+1,j}$$

$$i = 2, 3, \dots, m-1 \quad j = 2, 3, \dots, n$$

que es una fórmula explícita para el valor de  $V_{i,j-1}$  en función de los valores  $V_{i,j-1}$ ,  $V_{i,j}$ ,  $V_{i+1,j}$  correspondientes a tres nodos de la columna siguiente.

Además, de estas ecuaciones se dispone de las condiciones final y de contorno:



$$\begin{array}{lll}
 V_{put}(T, S) = (K - S)^+ & \forall S \in \mathbb{R}^+ & \text{Condición final} \\
 \left. \begin{array}{l} V_{put}(t, 0) = K \\ \lim_{S \rightarrow +\infty} V_{put}(t, S) = 0 \end{array} \right\} & \forall t \in [0, T] & \text{Condiciones de contorno}
 \end{array}$$

La versión discretizada es como sigue:

$$\begin{array}{ll}
 V(T, S) = (K - S)^+ & \Rightarrow V_{i,n} = \max(K - (i-1) \cdot \delta S, 0) \\
 V(t, 0) = K & \Rightarrow V_{1,j} = K \\
 V(t, S_{\max}) = 0 & \Rightarrow V_{m,j} = 0
 \end{array}$$

Partiendo de los valores de la última columna y aplicando las ecuaciones lineales que los vinculan con los valores en los nodos de la columna anterior, se pueden computar éstos desde el correspondiente a la segunda fila hasta el correspondiente a la penúltima.

Computados los valores preliminares de la opción en la penúltima columna  $V_{i,n-1}$   $i = 1, 2, 3, \dots, m - 1$  debe aplicárseles el procedimiento de Brennan & Schwartz que consiste en compararles con el "pay-off" correspondiente a su nodo si la opción se ejerciera anticipadamente, quedándose con el valor mayor de los dos, o sea:

$$V_{i,n-1} \leftarrow \max(V_{i,n-1}, \max(K - (i-1) \cdot \delta S, 0)) \quad i = 2, 3, \dots, m-1$$

Una vez calculada la penúltima columna por este procedimiento, y apoyándose en ella, se calcularán los valores preliminares de la antepenúltima columna y se volverá a aplicar el procedimiento de Brennan & Schwartz para obtener los valores definitivos. Así sucesivamente hasta llegar a la primera columna. Aprovechando que las constantes no dependen del tiempo los coeficientes pueden disponerse matricialmente del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix}
 A_2 & B_2 & C_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & A_3 & B_3 & C_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & A_4 & B_4 & C_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{m-1} & B_{m-1} & C_{m-1}
 \end{pmatrix}$$

que es una matriz de  $m - 2$  filas y  $m$  columnas.

Esta disposición permite computar los valores preliminares de cada columna a partir de la siguiente mediante un producto matricial de la matriz anterior por la columna de  $m$  elementos (incluyendo los valores en la frontera). El resultado es una columna de  $m-2$  elementos que son

los valores preliminares de los elementos interiores de la columna anterior. Después para cada columna, antes de computar la siguiente se debe aplicar el procedimiento de Brennan & Schwartz para computar los valores definitivos.

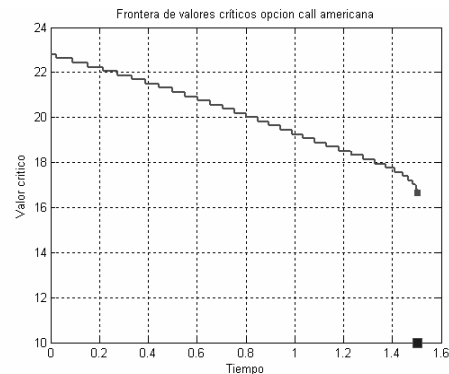
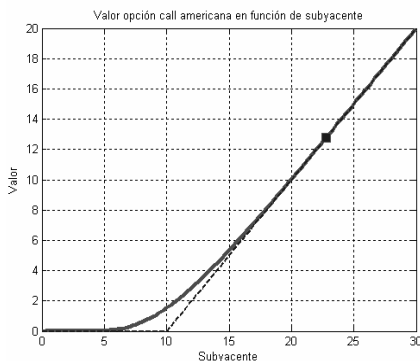
Una vez computado el valor en todos los nodos del retículo se tiene que definir el valor como una función continua que toma valores en los puntos interiores mediante interpolación. Tanto MatLab como Mathematica poseen comandos que realizan automáticamente la interpolación con suficiente flexibilidad como para que se pueda elegir el procedimiento. No se recomienda utilizar procedimientos de interpolación muy sofisticados como "*cubic splines*", lo ideal en dos dimensiones, como en este caso, es la interpolación bilineal que se apoya en los cuatro nodos que rodean a cada punto para obtener su valor. En MatLab la rutina para la interpolación en dos dimensiones es `interp2` que es la que se utiliza en los programas que se encuentran en las páginas web.

El procedimiento explícito es consistente y condicionalmente estable. No obstante, conviene subrayar lo de condicionalmente porque es muy fácil que para determinadas elecciones de  $\delta t$  y  $\delta S$  se obtengan valores no acotados. Para que el sistema sea estable la elección de los pasos, es decir, la discretización de retículo, tiene que ser cuidadosa. Generalmente, la discretización del tiempo tiene que ser mucho más fina que la del subyacente. Para no tener problemas deben elegirse  $m$  y  $n$  de modo que se verifique:

$$\delta t \leq \frac{1}{\sigma^2 \cdot m^2}$$

Precisamente por los problemas de estabilidad, el método de diferencias finitas explícitas no es un procedimiento que se recomienda. Para preservar la estabilidad el número de divisiones del tiempo tiene que ser muy grande y eso hace que, si se necesita que sea preciso, el procedimiento pueda ser lento. Por otra parte, es el procedimiento más sencillo de programar ya que no requiere de la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Los programas ValorDFEOPA, InformeDFEOPA, ValorDFEOCA e InformeDFEOCA pueden descargarse, están escritos en MatLab y utilizan el método de diferencias finitas explícitas para valorar opciones "put" y "call" americanas vainilla y para generar informes sobre las mismas que incluyen, el valor con más precisión, el valor crítico del subyacente en el momento actual, las gráficas y el cálculo de la frontera de valores críticos.



En el gráfico de la frontera de valores críticos  $S^*(t)$  se observa primero el escalonamiento debido a la precisión limitada por el propio método implícito y, segundo, que si, como en este caso, se trata de una opción "call" sobre una acción para la cual el dividendo es menor que el tipo de interés el límite por la izquierda de  $t \rightarrow T$  cuando  $S^*(t)$  no es el valor  $S^*(t) = K$  sino que:

$$\lim_{t \uparrow T} S^*(t) = \frac{r}{d} \cdot K$$

En este caso, la frontera no es continua en el vencimiento. Si el dividendo fuera mayor que el tipo de interés libre de riesgo el límite coincidiría con el "strike"  $K$  para una opción "call" americana. El principal inconveniente del método implícito es que la estabilidad no está garantizada. En los programas el intervalo del subyacente se divide en 199 subintervalos y el tiempo en 4999, si se reduce un poco este último número a 3000 o se sube el otro a 400 aparecen problemas de estabilidad que afortunadamente, se manifiestan de un modo tan claro que no dejan lugar a la menor duda. La principal ventaja del sistema es la simplicidad que permite su implementación incluso en Excel.

### 3 - Diferencias finitas implícitas

Considerando el caso de una opción "put" americana, partiendo de la PDE, sustituyendo las derivadas parciales respecto del subyacente por diferencias centrales y la derivada respecto del tiempo por la diferencia progresiva, se obtiene:

$$\frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 (i-1)^2 (\delta S)^2 \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{(\delta S)^2} + (r-d)(i-1) \delta S \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\delta S} - rV_{i,j} = O(\delta t, (\delta S)^2)$$

La ecuación parece la misma que en el caso del método explícito y, sin embargo, la diferencia es considerable. En esta ocasión existen tres puntos de la columna  $j$  y uno de la  $j+1$  que se supone es la conocida puesto que es posterior y se recorre el entramado desde el valor final hacia atrás.

Simplificando y operando, se nota:

$$A_i = \frac{1}{2}(r-d)(i-1)\delta t - \frac{1}{2}\sigma^2(i-1)^2\delta t$$

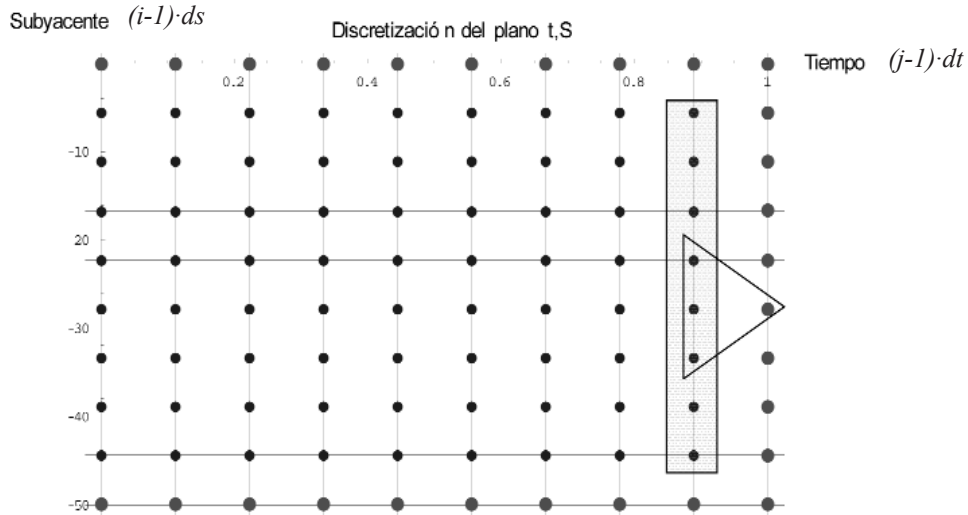
$$B_i = 1 + r\delta t + \sigma^2(i-1)^2\delta t$$

$$C_i = -\frac{1}{2}(r-d)(i-1)\delta t - \frac{1}{2}\sigma^2(i-1)^2\delta t$$

y se llega a la ecuación lineal:

$$A_i \cdot V_{i-1,j} + B_i \cdot V_{i,j} + C_i \cdot V_{i+1,j} = V_{i,j+1} \quad i = 2, 3, 4, \dots, m-1 \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

Además, se dispone de dos condiciones de contorno y una condición final que son las mismas que se vieron para el caso del método explícito. Se desconoce el valor en los nodos azules y se conoce en los nodos rojos, que es donde se definen la condición final y las condiciones de contorno.



Partiendo de los valores de la última columna, las ecuaciones lineales:

$$A_i \cdot V_{i-1,n-1} + B_i \cdot V_{i,n-1} + C_i \cdot V_{i+1,n-1} = V_{i,n} \quad i = 2, 3, 4, \dots, m-1$$

conforman un sistema lineal de  $m - 2$  ecuaciones con  $m - 2$  incógnitas correspondientes a los valores preliminares de la opción en los nodos de la penúltima columna. Se resuelve el sistema.

Computados los valores preliminares de la opción en la penúltima columna  $V_{i,n-1}$   $i = 1, 2, 3, \dots, m - 1$  debe aplicárseles el procedimiento de Brennan & Schwartz que consiste en compararlos con el "pay-off" correspondiente a su nodo si la opción se ejerciera anticipadamente, quedándose con el valor mayor de los dos, o sea:

$$V_{i,n-1} \leftarrow \max(V_{i,n-1}, \max(K - (i-1) \cdot \delta S, 0)) \quad i = 2, 3, \dots, m-1$$

Una vez computada la penúltima columna por este procedimiento y apoyándose en ella, se calculan los valores preliminares de la antepenúltima columna y se vuelve a aplicar el procedimiento de Brennan & Schwartz para obtener los valores definitivos. Así sucesivamente hasta llegar a la primera columna. Aprovechando que las constantes no dependen del tiempo se pueden disponer los cálculos de los valores preliminares matricialmente:

$$\begin{pmatrix} B_2 & C_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_3 & B_3 & C_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & B_4 & C_4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{m-1} & B_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{2,j-1} \\ V_{3,j-1} \\ V_{4,j-1} \\ \vdots \\ V_{m-1,j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{2,j} - A_2 \cdot V_{1,j-1} \\ V_{3,j} \\ \vdots \\ V_{m-2,j} \\ V_{m-1,j} - C_{m-1} \cdot V_{m,j-1} \end{pmatrix}$$

Esta disposición permite computar cada columna a partir de la siguiente mediante la resolución de un sistema lineal cuya matriz es tridiagonal y siempre la misma para todos los sistemas. La solución es una columna de  $m - 2$  elementos que son los elementos interiores de la columna anterior a la de los términos independientes.

La resolución es algo más compleja que la correspondiente al método explícito, porque deben resolverse  $n - 1$  sistemas de  $m - 2$  ecuaciones con  $m - 2$  incógnitas, además tanto  $n$  como  $m$  pueden ser valores grandes como  $n=m=500$ . Esto exige que el procedimiento elegido para la resolución de los sistemas deba ser muy eficiente para que los tiempos de ejecución sean razonables.

El método que se utiliza en los programas que se acompañan es un procedimiento iterativo que se conoce como BiCG (gradiente conjugado biortogonal) del que se ha comprobado empíricamente ser el más eficiente para este tipo de sistemas lineales. El procedimiento del gradiente conjugado biortogonal está disponible en MatLab que cuenta con un comando para ello "*bicg*" lo que simplifica notoriamente la programación del método implícito.

Como contrapartida a la mayor complejidad del método implícito respecto del método explícito, en aquél la estabilidad es prácticamente completa con independencia de los valores de  $m$  y  $n$ . Los programas ValorDFIOPA, InformeDFIOPA, ValorDFIOCA e InformeDFIOCA pueden descargarse, están escritos en MatLab y utilizan el procedimiento de diferencias finitas implícitas para valorar opciones "*put*" y "*call*" americanas y para generar informes sobre las mismas que incluyen el valor con mayor precisión, el valor crítico, las griegas y el cálculo de la frontera de valores críticos.

Para concluir con los procedimientos de diferencias finitas se analiza otro procedimiento que mezcla los métodos implícito y explícito, y se conoce como el procedimiento de Crank - Nicolson.

#### 4 - Procedimiento de Crank - Nicolson.

El método de Crank Nicolson es un híbrido del implícito y explícito que utiliza las ecuaciones en diferencias siguientes:

$$\frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\delta t} + \frac{1}{4} \sigma^2 (i-1)^2 (\delta S)^2 \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{(\delta S)^2} + \frac{1}{4} \sigma^2 (i-1)^2 (\delta S)^2 \frac{V_{i+1,j+1} - 2V_{i,j+1} + V_{i-1,j+1}}{(\delta S)^2} + \frac{1}{2} (r-d)(i-1) \delta S \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\delta S} + \frac{1}{2} (r-d)(i-1) \delta S \frac{V_{i+1,j+1} - V_{i-1,j+1}}{2\delta S} - \frac{1}{2} r V_{i,j} - \frac{1}{2} r V_{i,j+1} = 0$$

La derivada temporal es la misma que en el método implícito, pero los demás términos son combinaciones al 50% de los términos del método implícito y del explícito. Con esta combinación se complica la resolución, pero la precisión y la estabilidad obtenida es mayor.

A partir de la ecuación en diferencias anterior se pueden agrupar los términos con índices  $j$  en un lado y  $j + 1$  en el otro lado, ya que corresponden a dos columnas diferentes.

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{4}(r-d)(i-1)\delta t + \frac{1}{4}\sigma^2(i-1)^2\delta t\right)V_{i-1,j+1} + \left(1 - \frac{1}{2}r\delta t - \frac{1}{2}\sigma^2(i-1)^2\delta t\right)V_{i,j+1} + \\ & + \left(\frac{1}{4}(r-d)(i-1)\delta t + \frac{1}{4}\sigma^2(i-1)^2\delta t\right)V_{i+1,j+1} = \left(\frac{1}{4}(r-d)(i-1)\delta t - \frac{1}{4}\sigma^2(i-1)^2\delta t\right)V_{i-1,j} + \\ & + \left(1 + \frac{1}{2}r\delta t + \frac{1}{2}\sigma^2(i-1)^2\delta t\right)V_{i,j} + \left(-\frac{1}{4}(r-d)(i-1)\delta t - \frac{1}{4}\sigma^2(i-1)^2\delta t\right)V_{i+1,j} \end{aligned}$$

Entonces se puede notar:

$$ACN_i = \frac{1}{4}(r-d)(i-1)\delta t - \frac{1}{4}\sigma^2(i-1)^2\delta t$$

$$BCN_i = 1 + \frac{1}{2}r\delta t + \frac{1}{2}\sigma^2(i-1)^2\delta t$$

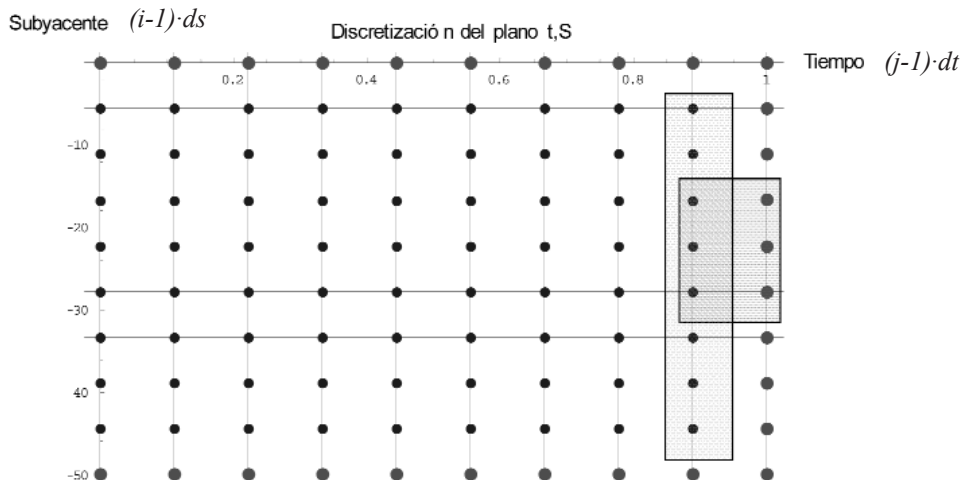
$$CCN_i = -\frac{1}{4}(r-d)(i-1)\delta t - \frac{1}{4}\sigma^2(i-1)^2\delta t$$

Con esta notación, sustituyendo se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} ACN_i \cdot V_{i-1,j} + BCN_i \cdot V_{i,j} + CCN_i \cdot V_{i+1,j} &= \\ = (-1) [ACN_i \cdot V_{i-1,j+1} + (BCN_i - 2)V_{i,j+1} + CCN_i \cdot V_{i+1,j+1}] & \\ i = 2, 3, \dots, m-1 & \end{aligned}$$

que relacionan tres elementos de la fila  $j$ -ésima con sus tres elementos correspondientes de la fila  $j + 1$ . Esto permite seguir un procedimiento de relleno por columnas hacia atrás resolviendo sistemas lineales de modo similar al método implícito.

Además, se dispone de dos condiciones de contorno y una condición final que son las mismas que se vieron para el caso del método explícito. Se desconoce el valor en los nodos azules y se conoce en los nodos rojos, que es donde se definen la condición final y las condiciones de contorno.



Partiendo de los valores de la última columna, las ecuaciones lineales forman un sistema lineal de  $m - 2$  ecuaciones con  $m - 2$  incógnitas correspondientes a los valores preliminares de la opción en los nodos de la penúltima columna. Se resuelve el sistema. Computados los valores preliminares de la opción en la penúltima columna  $V_{i,n-1}$   $i = 1, 2, 3, \dots, m - 1$  debe aplicárseles el procedimiento de Brennan & Schwartz, o sea:

$$V_{i,n-1} \leftarrow \max(V_{i,n-1}, \max(K - (i-1) \cdot \delta S, 0)) \quad i = 2, 3, \dots, m-1$$

Una vez computada la penúltima columna por este procedimiento y apoyándose en ella, se calculan los valores preliminares de la antepenúltima columna y se vuelve a aplicar el procedimiento de Brennan & Schwartz para obtener los valores definitivos. Así sucesivamente, hasta llegar a la primera columna.

Como los coeficientes del sistema no dependen del tiempo se pueden disponer los cálculos de los valores preliminares matricialmente:

$$\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_4 & B_4 & C_4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{m-1} & B_{m-1} & C_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1,n-1} \\ V_{2,n-1} \\ V_{3,n-1} \\ V_{4,n-1} \\ \vdots \\ V_{m-1,n-1} \\ V_{m,n-1} \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} A_2 & B_2-2 & C_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & B_3-2 & C_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_4 & B_4-2 & C_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{m-1} & B_{m-1}-2 & C_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1,n} \\ V_{2,n} \\ V_{3,n} \\ V_{4,n} \\ \vdots \\ V_{m-1,n} \\ V_{m,n} \end{pmatrix}$$

Donde los valores desconocidos están en azul y los conocidos en rojo, las dos matrices son  $(m - 2) \times m$  y los vectores tienen  $m$  componentes. Si se nota:

$$\begin{pmatrix} R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ \vdots \\ R_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_2 \cdot V_{n-1,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -C_{m-1} \cdot V_{n-1,m} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_2 & B_2-2 & C_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & B_3-2 & C_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_4 & B_4-2 & C_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{m-1} & B_{m-1}-2 & C_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{n,1} \\ V_{n,2} \\ V_{n,3} \\ V_{n,4} \\ \vdots \\ V_{n,m-1} \\ V_{n,m} \end{pmatrix}$$

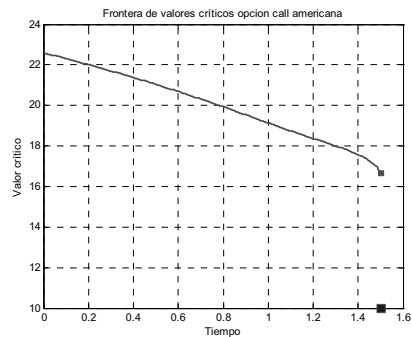
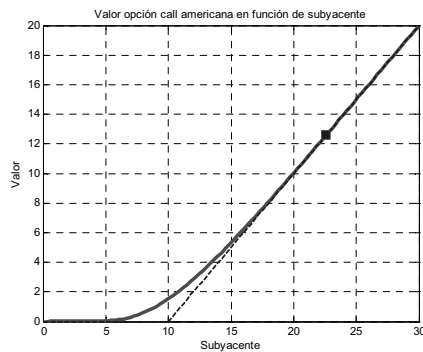
se tiene un sistema lineal de  $m - 2$  ecuaciones con  $m - 2$  incógnitas.

$$\begin{pmatrix} B_2 & C_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_3 & B_3 & C_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_4 & B_4 & C_4 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{m-1} & B_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{2,n-1} \\ V_{3,n-1} \\ V_{4,n-1} \\ \vdots \\ V_{m-1,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ \vdots \\ R_{m-1} \end{pmatrix}$$

Este sistema permite calcular cada columna a partir de la siguiente. En cada paso la matriz del sistema es la misma, pero cambian los términos independientes.

El método que se utiliza en los programas para la resolución de los sistemas es BiCG (gradiente conjugado biortogonal) como en el método implícito.

Pueden descargarse los programas ValorDFCNOPA, InformeDFCNOPA, ValorDFCNOCA e InformeDFCNOCA que están escritos en MatLab y utilizan el procedimiento de Crank Nicolson para valorar opciones "put" y "call" americanas y para generar informes sobre las mismas que incluyen su valor con mayor precisión, valor crítico, las griegas y el cálculo de la frontera de valores críticos.



El algoritmo de Crank Nicolson es completamente estable y produce resultados con precisión parecida a la del método implícito en tiempos parecidos. En el cómputo de la frontera de valores críticos sus resultados también son comparables a los del método implícito.

### 5 - Limitaciones de los métodos de diferencias finitas

El método explícito es apropiado si la única herramienta de la que se dispone es una hoja de cálculo como Excel. Es simple, sencillo y cuando presenta problemas de estabilidad los resultados que da son tan disparatados que se hace patente la existencia del problema. Si hubiese problemas de estabilidad deben aumentarse las divisiones del tiempo, disminuir las divisiones del subyacente, o ambas cosas a la vez.

Antes de la aplicación del procedimiento de Brennan & Schwartz la cota de error del método implícito en los nodos del retículo es del orden  $O(\delta t, (\delta S)^2)$ , teóricamente el mismo orden de magnitud que los otros dos procedimientos, sin embargo en la práctica funciona peor, sobre todo para la estimación de la frontera de valores críticos. Sobre la cota de error del valor computado en los nodos después del procedimiento de Brennan & Schwartz se conoce poco todavía.

Los métodos implícito y Crank Nicolson tienen ambos una cota de error en los nodos que es una  $O(\delta t, (\delta S)^2)$  antes de Brennan & Schwartz. Son muy estables convergiendo para casi cualquier combinación de anchuras en las mallas de tiempo y subyacente. Ambos métodos descansan en la resolución de muchos grandes sistemas lineales de ecuaciones, por consiguiente su eficacia y tiempo de proceso (coste) depende en gran medida de la eficiencia del algoritmo para resolver los sistemas lineales. Los mejores resultados se obtienen con los procedimientos iterativos como el del gradiente conjugado biortogonal.



En general, se piensa que para los problemas que se plantean en la valoración de opciones es preferible el procedimiento de diferencias finitas implícitas al método de Crank Nicolson pues aunque la precisión de ambos es similar, el método implícito es más sencillo de programar e implementar. Cuando el dividendo es muy pequeño en las opciones "call" americanas se debe ser prudente con las valoraciones obtenidas mediante diferencias finitas y se recomienda que sean contrastadas con el método binomial.

### 6 - Valoración numérica mediante el algoritmo binomial.

El procedimiento, método o algoritmo binomial para valorar opciones tiene fundamentos teóricos completamente diferentes de los de los procedimientos de diferencias finitas. Se basa en que, por el teorema fundamental de las Finanzas de Harrison & Pliska, el valor de cualquier derivado en ausencia de arbitrajes viene dado por el valor esperado en la medida de probabilidad de riesgo neutro del valor presente de la variable aleatoria "pay-off" al que dará lugar. En el caso de una opción "put" americana vainilla, se trata de computar:

$$V_{put}(t, S) = E_{t,S} \left[ e^{-r \cdot \tau_{t,S}} \cdot \max(K - S_{t+\tau_{t,S}}, 0) \right]$$

donde el operador  $E_{t,S}$  representa a la esperanza en la medida de probabilidad de riesgo neutro, en la cual el proceso del subyacente se caracteriza por comenzar en  $(t, S)$  y seguir un GBM cuya ecuación diferencial estocástica es:

$$\frac{dS}{S} = (r - d) \cdot dt + \sigma dW$$

}	$r$ tasa de interes libre de riesgo $d$ dividendo continuo pagado por $S$ $\sigma$ volatilidad de $S$ $W$ proceso de Wiener
---	--

y dentro del operador, en la expresión de la que se calcula el valor esperado hay dos variables aleatorias: el tiempo de parada óptimo  $\tau_{t,S}$  y el valor del proceso del subyacente en dicho momento  $S_{t+\tau_{t,S}}$ .

El valor de la opción  $V_{put}(t, S)$  por aplicación del teorema de Harrison & Pliska coincide, como no podía ser de otro modo, con la definición dada para los contratos americanos como problemas de parada óptima.

El método binomial es un procedimiento probabilístico que no involucra problemas de frontera libre, aunque obviamente está interrelacionado con ellos, fue desarrollado por John Cox, Stephen Ross y Mark Rubinstein en su famoso papel "*Option Pricing: A Simplified Approach*", *Journal of Financial Economics* 7 de 1979. Detrás del algoritmo binomial aplicado a las opciones americanas hay dos ideas básicas:

1. Aproximar la ley de probabilidad correspondiente al proceso estocástico seguido por el subyacente (o sea, aproximar sus distribuciones finito dimensionales fdd) en la medida de probabilidad  $P$  de riesgo neutro mediante una sucesión de leyes de probabilidad asociadas a procesos "random walk" geométricos definidos en árboles discretos con vértice en el punto de partida  $(t, S)$  y hojas en  $T$ .

Estas medidas de probabilidad convergen débilmente (en distribución) hacia la medida de probabilidad de riesgo neutro en el medio continuo conforme el número de pasos del árbol va creciendo. Por tanto, los valores esperados de cualquier variable aleatoria, como por ejemplo el valor presente del "pay-off", computados con las probabilidades de la sucesión convergen hacia el valor esperado en la medida de probabilidad de riesgo neutro del valor presente del "pay-off". Es decir, que los valores esperados del valor presente del "pay-off" asumiendo que el subyacente sigue estos "random walk" geométricos convergen hacia el valor de la opción.

La sucesión de los "random walk" cuyas leyes van a converger en distribución hacia el GBM no van a ser cualesquiera sino que van a construirse detalladamente. La convergencia débil es consecuencia del principio de invarianza de Monroe Donsker. En román paladino lo que se hace es aproximar el proceso GBM principal en la medida de riesgo neutro por "random walks" geométricos en medios discretos que son árboles cada vez más tupidos, construidos de modo que por sus características van aproximándose cada vez mejor al proceso principal.

2. La segunda idea está directamente relacionada con la naturaleza americana de la opción, es decir con la posibilidad de ejercicio anticipado. Se denomina principio de inducción marcha atrás o "backward induction" y consiste en apoyarse en que se conoce con certeza el valor que tomaría el "pay-off" en el momento del vencimiento, es decir en las hojas del árbol. A partir de estos valores calcular el valor esperado del valor presente del "pay-off" de la opción en los nodos inmediatamente anteriores. Con este cálculo se están estimando los valores de la opción preliminares en el nivel penúltimo del árbol. Dichos valores preliminares deben pasar por un proceso idéntico al de Brennan & Schwartz que elija en cada nodo el mayor entre el valor preliminar calculado y el "pay-off" correspondiente a dicho nodo. Este será el valor definitivo en estos nodos.

Este procedimiento es necesario para asegurarse que la función valor es la menor función superarmónica que domina la función de "pay-off". Al equivalente de Brennan & Schwartz en este contexto se le suele denominar envolvente de Snell.

Apoyándose en el nivel penúltimo se repite el proceso para el antepenúltimo y así sucesivamente hasta llegar al vértice. El valor correspondiente al vértice es el que se buscaba.

La primera idea es lo que convierte al procedimiento binomial en un procedimiento probabilístico. No es que se simulen las trayectorias sino que se aproxima la medida de probabilidad y de este modo, se puede aproximar el funcional valor esperado.

La segunda idea, la del envolvente de Snell no es probabilística, de hecho de otro modo, se ha utilizado en los métodos de diferencias finitas donde a partir de la condición final y mediante las ecuaciones lineales se calculan los valores preliminares en los nodos correspondientes a niveles anteriores, se aplica Brennan & Schwartz para calcular los valores definitivos y se continúa este proceso en el nivel de tiempo anterior y así sucesivamente hasta llegar al momento actual. Existen diferencias del algoritmo binomial con diferencias finitas, porque:

- a) El retículo era un rectángulo en lugar de un árbol.
- b) Para regresar en el tiempo se utilizaban las ecuaciones lineales de la difusión correspondientes al método particular de diferencias finitas mas el procedimiento de Brennan & Schwartz mientras que en el algoritmo binomial se utiliza la fórmula:

$$V_{i,j} = \max \left[ e^{-r \cdot \delta t} \cdot (pV_{i+1,j} + (1-p)V_{i,j+1}), \max(K - S_{i,j}, 0) \right]$$

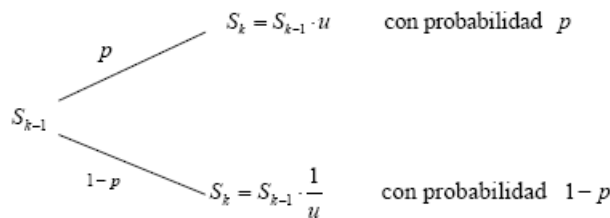
c) En diferencias finitas se obtienen a la vez toda la superficie de valores correspondiente al dominio mientras que en el método binomial solo se obtiene el valor en el vértice.

El algoritmo binomial tiene algunas ventajas sobre los procedimientos de diferencias finitas, es más intuitivo y mucho más simple de programar que cualquiera de los algoritmos de diferencias finitas, además es posible construir árboles muy grandes sin que el consumo de memoria principal sea inmanejable porque no es necesario conservar los resultados intermedios, en cada paso sólo se precisan el nivel posterior y el que se está computando.

Por último, en el método binomial no se requiere que el árbol abarque toda la frontera de valores críticos ni se sustituye un dominio no acotado por otro acotado, por ello es aplicable a todas las opciones americanas, incluyendo las "call" sobre acciones que no pagan dividendo que tienen la frontera de valores críticos en el infinito.

El primer paso del método binomial es construir el árbol. Para ello se considera un "random walk" que en un paso si parte de un valor de subyacente  $S_{k-1}$  se pueden dar dos posibilidades:

- a) Subida de valor a  $S_k = S_{k-1}u$  con  $u > 1$  con probabilidad  $p$
- b) Descenso del valor a  $S_k = \frac{S_{k-1}}{u}$  con probabilidad  $1 - p$



Con esto todavía no se condiciona la convergencia en distribución de la caminata al azar. Para asegurarse de que se produce la convergencia débil de los "random walk" geométricos hacia el GBM de riesgo neutro se exigen dos condiciones:

1. El rendimiento esperado de cada paso es la tasa libre de riesgo, o sea que:

$$S_{k-1}e^{(r-d) \cdot \delta t} = pS_{k-1}u + (1-p)\frac{S_{k-1}}{u} \Rightarrow e^{(r-d) \cdot \delta t} = pu + \frac{(1-p)}{u}$$

2. La varianza de rendimientos debe ser  $\sigma^2 \delta t$ , o sea que:

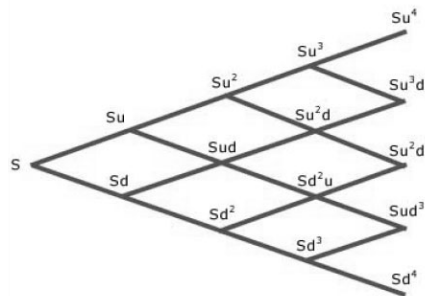
$$\sigma^2 \delta t = pu^2 + \frac{(1-p)}{u^2} - \left[ pu + \frac{(1-p)}{u} \right]^2$$

Resolviendo este sistema se llega a  $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$

$$p = \frac{e^{(r-d)\sqrt{\delta t}} - 1}{u - \frac{1}{u}}$$

y con estos dos valores se puede construir la medida de probabilidad en el árbol que gobierna las trayectorias seguidas por el "random walk" geométrico. Conforme se aumenta el número de pasos, cambia  $\delta t = \frac{T-t}{n}$  y cambian el árbol, la medida de probabilidad y el proceso "random walk". Los "random walks" así contruidos convergen al GBM libre de riesgo y pueden ser utilizados para aproximar el valor de cualquier derivado o contrato contingente sobre el subyacente  $S$

A cada nodo del árbol le corresponde un tiempo, un valor del subyacente y una probabilidad de que partiendo del vértice el "random walk" pase por allí.



Asignar valores del subyacente a cada nodo del árbol es elemental, más aún habiendo elegido los parámetros de modo que  $d = 1/u$ . Después de  $k$  pasos hacia arriba y  $n - k$  pasos hacia abajo, no importa el orden de los pasos, se habrá salido del vértice del árbol  $S_0$  y llegado al mismo punto cuyo valor del subyacente asociado es  $S_0 u^k d^{n-k} = S_0 \frac{u^k}{u^{n-k}} = S_0 u^{2k-n}$

A dicho punto se le puede asignar la probabilidad de que saliendo del vértice se llegue después de  $n$  pasos al punto donde se está. Esta probabilidad será la suma de las probabilidades individuales asignadas a cada una de las trayectorias que llevan del vértice al punto donde se está. Una trayectoria particular subida, bajada, bajada, subida, ... , tendrá como probabilidad asociada  $p(1 - p)(1 - p)p\dots\dots$ , pero como el producto es conmutativo, cada una de las trayectorias que llevan del vértice  $S$  al nodo en cuestión tienen probabilidad  $p^k (1 - p)^{n-k}$ .

Calcular la probabilidad total de salir del vértice y llegar al nodo en el que se está después de  $n$  pasos depende sólo del número trayectorias que cumplen esta condición, es decir, del número de veces en que se pueden ubicar las  $k$  subidas en los  $n$  pasos y este número es  $\binom{n}{k}$ .

La probabilidad que debe asociarse al nodo, y por consiguiente, la probabilidad que debe asignarse al evento de que después de  $n$  pasos el valor del subyacente sea  $Su^{2k-n}$  es:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

En el árbol, después de n pasos existen sólo n+1 valores diferentes del subyacente dependiendo del número de subidas en la trayectoria, es decir de k. Como en n pasos hay que acabar en algún lugar, la suma de estas probabilidades correspondientes a los diferentes posibles valores tiene que ser la unidad.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$$

No es casualidad que se denomine "*binomial*" a este modelo pues en cada nivel temporal n las probabilidades asociadas a los n+1 nodos se corresponden con los sumandos del desarrollo del binomio de Newton  $(p + (1-p))^n = 1$ .

Con la probabilidad asociada a cada nodo se tiene definida una medida de probabilidad en el conjunto de las posibles trayectorias seguidas por el "*random walk*" geométrico de riesgo neutro. Por tanto, como este "random walk" aproxima el proceso del subyacente, se está en condiciones aproximar el valor de cualquier contrato contingente. Si el contrato es de tipo europeo y se conoce su "*pay-off*" en los nodos de final del árbol (hojas) que se han hecho coincidir con el vencimiento del contrato, a cada hoja puede asignársele dicho "*pay-off*". Si fuera una "*call*" europea con "*strike*" K dichos valores serían:

Probabilidad	Subyacente	"Pay-off"
$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$Su^k d^{n-k}$	$\max(Su^k d^{n-k} - K, 0)$

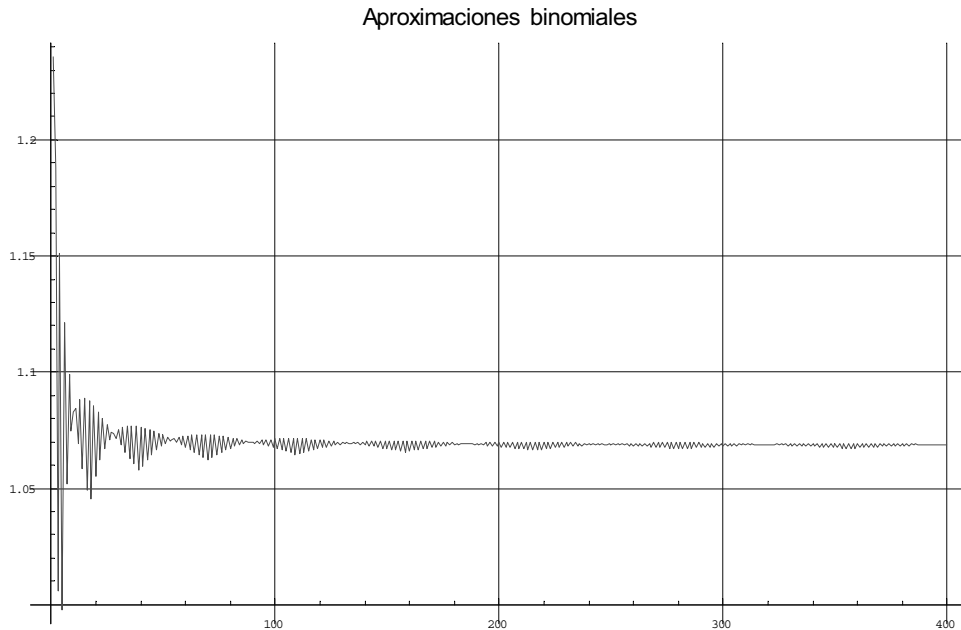
Con los valores del "*pay-off*" y sus probabilidades, se puede calcular la esperanza matemática del valor presente del "*pay-off*" y como la medida aproxima la medida de probabilidad de riesgo neutro, el valor computado aproxima el valor de la opción call europea.

$$V_{call\ europea}(t, S) \approx e^{-r(T-t)} \cdot \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \max(Su^k d^{n-k} - K, 0)$$

Del mismo modo, si se tratara de una opción "*put*" europea se podría escribir:

$$V_{put\ europea}(t, S) \approx e^{-r(T-t)} \cdot \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \max(K - Su^k d^{n-k}, 0)$$

Estas aproximaciones convergen hacia el valor correcto de la opción conforme n se hace más grande. En la práctica con n = 200 se obtienen valores con suficiente precisión. A partir de ahí la convergencia es más lenta.



El método binomial aplicando sólo la primera idea básica de la convergencia en distribución de las medidas de probabilidad, sin hacer uso de la segunda idea de "backward induction", conduce a fórmulas explícitas para la aproximación, tanto como se desee, del valor de opciones vainilla de tipo europeo. Obviamente, estas fórmulas requieren más tiempo de cómputo que las fórmulas de Black & Scholes y no se utilizan para nada en la práctica, pero sirven para aclarar la naturaleza probabilística del método binomial, así como para justificar su denominación. El uso de este procedimiento para las opciones americanas requiere de la segunda idea básica, es decir, de "backward induction" desde las hojas hasta el vértice aplicando, en el caso del "put" la fórmula:

$$V_{i,j} = \max \left[ e^{-r \cdot \delta t} \cdot (pV_{i+1,j} + (1-p)V_{i+1,j+1}), \max(S_{i,j} - K, 0) \right]$$

El cálculo del valor de una opción con este algoritmo es en tiempo y precisión comparable con los cálculos realizados mediante diferencias finitas. La desventaja reside en que se computa un único valor de la opción en el vértice, lo que le convierte en inadecuado para la elaboración de gráficos bidimensionales o tridimensionales y también para la estimación de la frontera de valores críticos.

Los programas ValorBINOPA y ValorBINOCA pueden descargarse, están escritos en MatLab y utilizan el procedimiento binomial con  $n = 1000$  para valorar opciones "put" y "call" americanas vainilla. No se generan gráficos ni información de otro tipo. El algoritmo del programa es muy eficiente en el uso de memoria ya que no almacena todo el árbol, sino solamente dos niveles en todo momento. Para obtener una precisión parecida con el algoritmo de diferencias finitas implícito se precisa una matriz  $1000 \times 1000$  y en una valoración se tarda el doble.

---

## 5. REFERENCIAS

- Arrow, K.J., Blackwell, D. & Girshick, M.A. (1949) *Bayes and minimax solutions of sequential decision problems*. *Econometrica* 17
- Bellman, R. (1957) *Dynamic Programming*. Princeton University Press.
- Carr, P., Jarrow, R. & Minen, R. (1992) *Alternative characterization of American put options*. *Mathematical Finance* 2
- Jacka, S.D. (1991) *Optimal stopping and the american put*. *Mathematical Finance* 1
- Peskir, G. (2005) *On the american option problem*. *Mathematical Finance* 15
- Peskir, G & Shiryaev, A. (2006) *Optimal stopping and free-boundary problems*. *Lectures in Mathematics ETH Zurich*.
- Detemple, J. (1999) *American Options: Symmetry Properties*. *Cirano - Montreal*
- Brennan, M.J. & Schwartz, E.S. (1977) *The valuation of american put options*. *Journal of Finance* 32.
- Jaillet, P., Lamberton, D. & Lapeyre, B. (1990) *Variational inequalities and the pricing of American options*. *Acta Appl. Math.* 21.
- Karatzas, I. & Schreve, S.E. (1998) *Methods of Mathematical Finance*. *Applications of Math*. Springer Verlag.
- McKean, H.P. (1965) *A free-boundary problem for the heat equation arising from a problem in mathematical economics*. *Ind. Management Rev.* 6.
- Van Moerbeke, P. (1976) *On optimal stopping and free-boundary problems*, *Arch. Rational Mech Anal*, 60.
- Cox, J.C., Ross, S.A. & Rubinstein, M. (1979) *Option pricing: A simplified approach*. *Journal of Financial Economics*
- Bjerksund, P. & Stensland, G. (1993) *American Exchange Options and a Put and Call Transformation: A note*. *Journal of Business, Finance and Accounting* 20(5).
- McDonald, R. & Schroder, M.D. (1998) *A parity result for american options*. *Journal of Computational Finance* Vol 1.

