

Modelización de la volatilidad del tipo de interés a corto plazo*

Francis Benito

Universidad de Alicante.

Ángel León

Universidad de Alicante.

Juan M. Nave **

Universidad de Castilla - La Mancha.

Resumen: Este artículo analiza en el mercado español el impacto que el diferente tratamiento de la volatilidad de los cambios del tipo de interés a corto plazo tiene sobre la bondad de los modelos unifactoriales de los tipos de interés. Para ello se estiman y comparan distintas modelizaciones de heterocedasticidad condicional agrupadas en tres bloques: (1) los modelos Nivel; (2) los modelos GARCH; y (3) los modelos Mixtos que combinan los efectos nivel y GARCH recogidos por los anteriores. El análisis realizado revela la superioridad de los modelos Mixtos, confirmando la evidencia internacional. Adicionalmente, se detecta una ausencia de asimetría en la respuesta de la volatilidad condicional del tipo de interés a corto plazo frente a sus innovaciones.

Palabras clave: Modelos de tipos de interés; Heterocedasticidad condicional; Modelos GARCH; Estructura temporal de los tipos de interés.

Clasificación JEL: C22; E43.

Abstract: This paper compares the ability of alternative one factor models to capture the volatility of short term interest rates in the Spanish market. Several conditional heteroscedasticity models are estimated. Specifically, they are divided into three groups: (1) Levels models, (2) GARCH models and (3) Mixed models. Models under the last group combine the effects in both

* Los autores quieren agradecer los comentarios y sugerencias de Manuel Moreno, Eliseo Navarro, Alfonso Novales, Antonio Rubia, Gonzalo Rubio, un evaluador anónimo de Documentos de Trabajo del IVIE y, especialmente, los de un evaluador anónimo y el editor, Alejandro Balbás, de la Revista de Economía Financiera. También se encuentran en deuda con Antonio García de la Oficina de Estadística y Central de Balances del Banco de España, desde donde ha resuelto con extrema amabilidad todas las dudas surgidas en la elaboración de la base de datos. Una versión anterior de este trabajo se presentó en las III Jornadas sobre Estructura Temporal de Tipos de Interés (Cuenca, 2002) y el X Foro de Finanzas (Sevilla, 2002) y ha sido publicada por el IVIE en su serie de Documentos de Trabajo con la referencia WP-EC 2002-28. Francis Benito y Ángel León agradecen la financiación recibida de la Oficina de Ciencia y Tecnología de la Generalitat Valenciana, CTIDIA2002-103. Ángel León agradece la financiación del Ministerio de Ciencia y Tecnología (DGI), BEC2002-3797. Ángel León y Juan M. Nave agradecen la financiación de la Fundación BBVA, 1/BBVA 00044.321-15466/2002. Juan M. Nave agradece la financiación del Ministerio Español de Ciencia y Tecnología (DGI), BEC2001-1599, y de la Consejería de Ciencia y Tecnología de la Junta de Comunidades de Castilla - La Mancha, PAC2002-001.

** Correspondencia a: Juan M. Nave, Facultad de Ciencias Sociales, Avda. Alfares 44, 16071 - Cuenca. Dirección electrónica: Juan.Nave@uclm.es.

(1) and (2). The empirical results show that Mixed ones overcome the others. This fact confirms the international evidence. Finally, there is no significance for asymmetric behavior in the conditional volatility.

Keywords: Interest rate models; Conditional heteroscedasticity; GARCH models; Term structure of interest rates.

JEL Classification: C22; E43

1. INTRODUCCIÓN

La dinámica del tipo de interés a corto plazo recibe una considerable atención en la literatura financiera puesto que constituye el principal factor en la modelización de la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI). Sin embargo, no existe consenso unánime sobre la mejor manera de modelizar el tipo de interés a corto plazo y, en particular, sobre el tratamiento concreto de su volatilidad, pieza clave, al menos desde un punto de vista teórico, en la determinación de las primas de riesgo.

Con la finalidad de aportar evidencia al respecto, en este trabajo analizamos los modelos en tiempo continuo con un único factor que, además de presentar las ventajas de su sencillez, de su fácil estimación y de ofrecer, bajo ciertas condiciones, soluciones cerradas para la valoración de bonos cupón cero y de sus derivados, por el hecho de ser los más parcos en el número de factores, van a permitir resaltar la influencia del distinto tratamiento que en ellos se hace de la volatilidad.

En el contexto señalado, los distintos modelos desarrollados en la literatura pueden clasificarse, atendiendo al tratamiento específico que dan a la volatilidad del tipo de interés a corto plazo, en tres grandes grupos: (1) los modelos anidados en Chan et al. (CKLS) (1992), los cuales especifican la volatilidad del tipo de interés a corto plazo como función de su nivel y que, por ello, denominamos modelos Nivel; (2) los modelos generalizados de heterocedasticidad condicional autorregresiva, modelos GARCH, en los que la volatilidad es función de su propio pasado y del impacto de las innovaciones del tipo de interés a corto plazo; y (3) los modelos Mixtos, que combinan el *efecto nivel* y los efectos GARCH, modelos introducidos inicialmente por Kearns (1992), aunque fueran Brenner, Harjes y Kroner (BHK) (1996) los primeros en presentar resultados de su estimación.

La evidencia empírica internacional ha mostrado que los modelos Nivel tienden a sobrestimar el propio *efecto nivel*, principalmente por no recoger la correlación serial en la varianza condicional que los modelos GARCH captan con mayor precisión, recogiendo el *efecto agrupamiento*, propio de las series financieras de alta frecuencia. No obstante, estos últimos modelos también han recibido críticas variadas: la primera y más importante es la de no reflejar el impacto del nivel de los tipos sobre la volatilidad; en segundo lugar, la de presentar, al igual que los modelos de volatilidad constante, la indeseable propiedad de permitir tipos negativos; y, por último, la relativa a la alta persistencia de las innovaciones en la volatilidad encontrada que puede dar indicios de no estacionariedad, dificultando el estudio de la serie. Todos estos inconvenientes han llevado a la consideración en los últimos años de los modelos Mixtos, es decir, modelos en los que la volatilidad depende, tanto del nivel del tipo de interés a corto plazo, como de su propio pasado y del impacto de las innovaciones.

Son bastante numerosos los estudios empíricos realizados en diferentes mercados, entre los que destacan Andersen y Lund (1997a), Koedijk et al. (1997), Bali (2000a, 2000b) y, el más reciente, Bali (2003), que demuestran que los modelos Mixtos permiten una mejor representación de la dinámica de la volatilidad de los cambios en el tipo de interés a corto plazo frente a los modelos Nivel y modelos GARCH. Sin embargo, en el mercado español, a pesar de encontrar trabajos que utilizan los modelos Nivel, como los de Moreno y Peña (1996), García (1998), Navas (1999) y Rico (2000), y los modelos GARCH, como los de Abad (2000) y Benito (2001), el análisis y/o aplicación de los modelos Mixtos, hasta donde llega el conocimiento de los autores, no se ha llevado a cabo.

Así pues, en el contexto particular del mercado español, el objetivo principal de este trabajo se concreta en corroborar la evidencia internacional, es decir, la superioridad de los modelos Mixtos frente a los modelos Nivel y modelos GARCH. Para ello, el resto del trabajo se estructura del siguiente modo: en la siguiente sección, la segunda, se especifican los distintos modelos que se analizarán posteriormente; en la sección tercera se describen los datos utilizados; la sección cuarta se dedica a la estimación de los modelos y a la presentación de los resultados obtenidos; y por último, en la sección quinta se resumen las principales conclusiones obtenidas en el trabajo.

2. MODELIZACIÓN UNIFACTORIAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS

Tal y como se ha comentado, nos centramos en la modelización unifactorial en tiempo continuo del tipo de interés a corto plazo, r_t , asumiendo que la dinámica de sus movimientos sigue un proceso de difusión de Ito representado a través de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = \mu_t(r_t)dt + \sigma_t(r_t)dW_t \quad (1)$$

en donde $\mu_t(r_t)$ es la deriva o esperanza condicional instantánea de la variación del tipo de interés por unidad de tiempo; el cuadrado de $\sigma_t(r_t)$ es la varianza condicional de la variación del tipo de interés por unidad de tiempo; y dW_t es un proceso de Wiener, $dW_t : N(0, dt)$ siendo para un t dado.

2.1. Especificación de la deriva

Una de las especificaciones más utilizada en los trabajos sobre tipos de interés ha sido la del modelo de Vasicek (1977), el cual especifica la deriva en la expresión (1), como un proceso de reversión a la media, $\mu_t(r_t) = \alpha_0 + \alpha_1 r_t$, donde r_t revierte hacia el tipo de interés medio a largo plazo $-\alpha_0 / \alpha_1$, mientras $-\alpha_1$ mide la velocidad constante de reversión a esa media. La hipótesis de reversión a la media implica la existencia, bajo condiciones normales, de un valor medio alrededor del cual el tipo de interés a corto plazo revierte. De no ser así, la varianza de la distribución incrementaría sin límite con el paso del tiempo¹.

¹ Existen argumentos económicos convincentes asociados a los ciclos económicos y a la demanda de fondos que avalan este tipo de procesos: cuando los tipos son elevados, la economía tiende a ralentizarse y se demandan menos fondos, como resultado, los tipos de interés bajan; cuando los tipos son bajos, se incrementa la demanda de fondos y los tipos de interés tienden a subir.

No obstante, son varios los autores, como por ejemplo Ait-Sahalia (1996), los que indican que una especificación lineal de la reversión a la media no recoge la distinta fuerza con la que tiende a su media a largo plazo el tipo de interés a corto plazo según sea su nivel. En este sentido, Koedijk et al. (1997) y Ball y Torous (1999) muestran que la especificación no lineal de la reversión a la media, no tiene repercusión sobre las estimaciones de los parámetros de volatilidad estocástica.

2.2. Especificación de la volatilidad

- Modelos Nivel.

Una característica del comportamiento histórico de los tipos de interés es que, aunque sólo se deba a motivos de escala, tienden a ser más volátiles cuanto más elevados son. Este efecto, junto a la posibilidad de producir tipos negativos que tienen los modelos de volatilidad constante, como los de Merton (1973) y Vasicek (1977), se palia con el desarrollo de los modelos Nivel, en los cuales la volatilidad de las variaciones del tipo de interés a corto plazo es función del nivel de los tipos. En CKLS (1992) se realiza un estudio empírico de estos modelos que quedan anidados en la siguiente ecuación diferencial estocástica ²,

$$dr_t = (\alpha_0 + \alpha_1 r_t) dt + \sigma r_t^\gamma dW_t \quad (2)$$

El parámetro de difusión, σ , es meramente un factor de escala de la volatilidad; mientras que la presencia de r_t^γ , en el término de difusión, asegura tipos positivos e introduce la heterocedasticidad condicional únicamente a través del nivel de los tipos, reflejando así el *efecto nivel*. El parámetro γ es el coeficiente de la elasticidad de la volatilidad respecto a r , es decir, valores de γ superiores a la unidad indican una alta sensibilidad de la volatilidad al nivel del tipo de interés a corto plazo. La dinámica de la ecuación (2) implica que la media y la varianza condicional de los cambios en el tipo de interés a corto plazo dependen exclusivamente del nivel actual de los tipos y no de su comportamiento pasado, es decir, el tipo de interés a corto plazo sigue un proceso de Markov.

Para la estimación de la ecuación (2) se utiliza la discretización de Euler³:

$$\Delta r_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3)$$

donde $\Delta r_t \equiv r_t - r_{t-1}$ y

² Este modelo anida a los modelos de volatilidad constante y Nivel más conocidos, como son el de Merton (1973); Vasicek (1977); Cox et al. (1985); Dothan (1978); Black y Scholes (1973); Brennan y Schwartz (1980); Cox et al. (1980); Cox (1975) y Cox y Ross (1976).

³ En este sentido, James y Webber (2000:363) afirman en base a su experiencia que en las aplicaciones típicas de modelización de tipos de interés, los requerimientos computacionales adicionales requeridos al considerar aproximaciones de orden superior son demasiado grandes respecto de las ganancias que éstas reportan.

$$\varepsilon_t \equiv h_t^{1/2} \eta_t ; \quad \eta_t : iid N(0,1) ; \quad \varepsilon_t / I_{t-1} : N(0, h_t) ;$$

siendo I_{t-1} el conjunto de información disponible hasta el momento $t-1$. La ecuación de la varianza condicional para los modelos Nivel viene dada por la siguiente expresión:

$$h_t = \sigma^2 r_{t-1}^{2\gamma} \tag{4}$$

- Modelos GARCH.

Es ampliamente reconocido que las series de tipos de interés presentan una fuerte heterocedasticidad condicional en la varianza. El modelo de CKLS intenta recoger esta característica permitiendo a la volatilidad depender del nivel de los tipos. Sin embargo, los modelos Nivel no son capaces de captar completamente la heterocedasticidad, al no recoger el *efecto agrupamiento* y la alta persistencia, propios de las series financieras, lo que a su vez provoca que sobrestimen la sensibilidad de la volatilidad al nivel de los tipos de interés, tal y como se pone de manifiesto en BHK (1996), quienes consideran que $\gamma=1$ o $\gamma=1.5$ representan valores poco razonables de la sensibilidad de la volatilidad al nivel de los tipos, pues en el mercado americano de letras del tesoro se han dado periodos históricos de estabilidad con tipos altos (por ejemplo de 1983 a 1984) y periodos de gran volatilidad con tipos bajos (por ejemplo a finales de 1992 e inicio de 1993) ⁴.

Una clase diferente de modelos, que sí recogen tales características, son los modelos GARCH ⁵. Estos modelos especifican la varianza condicional en función de su propio pasado y del cuadrado de las observaciones pasadas del componente no anticipado de los tipos de interés. Puesto que para todos los modelos mantendremos la misma especificación para la media condicional, la diferencia vendrá dada por la especificación para la ecuación de la volatilidad condicional. De este modo la ecuación (4) para el modelo GARCH (1,1) es ⁶:

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 \tag{5}$$

En el modelo GARCH el efecto sobre la varianza de las innovaciones es independiente del signo de éstas. Sin embargo, la evidencia parece mostrar que las innovaciones positivas en los

⁴ Esta misma línea argumental se defiende en los trabajos de Koedijk et al. (1997) y Andersen y Lund (1997a) entre otros.

⁵ El modelo GARCH (p,q) fue presentado por Bollerslev (1986) como una generalización del modelo de Engel (1982) y aplicado a series de tipos de interés por Engle et al. (1987), Engle et al. (1990) y Engle y Ng (1993).

⁶ La utilización de la estructura GARCH (1,1) es un criterio estándar ampliamente aceptado, pues se ha comprobado que recoge suficientemente la estructura en volatilidad. Así la mayoría de los trabajos que analizan a los modelos Mixtos proponen para estos una estructura GARCH (1,1), como por ejemplo: BHK (1996), Koedijk et al. (1997), Andersen y Lund (1997b), Bali (1999, 2000a, 2000b, 2003), Koutmos (2000) y Ferreira (2000). Imponer modelos más complejos, con respecto a los órdenes de p y q, en la modelización de la heterocedasticidad condicional genera problemas en la estimación, ya que se tiene que estimar conjuntamente los parámetros del modelo de volatilidad condicional, los parámetros del modelo de la media y el valor de γ .

cambios de los tipos de interés (negativas en precios de bonos y rendimientos) tienen mayor impacto en la volatilidad que las innovaciones negativas de la misma magnitud. Esta respuesta asimétrica de la volatilidad se conoce también como *efecto apalancamiento*, y para recogerlo han surgido los modelos asimétricos, que en realidad son generalizaciones del modelo GARCH. La especificación del componente predecible de la volatilidad, la varianza condicional, para el modelo GJR-GARCH, propuesto por Glosten et al. (1993), del que se presentan resultados es la siguiente ⁷:

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \theta D_{t-1}^+ \varepsilon_{t-1}^2, \quad (6)$$

con $D_{t-1}^+ = 1$ if $\varepsilon_{t-1} > 0$; $D_{t-1}^+ = 0$ en caso contrario

La obtención de un valor para el parámetro $\theta \neq 0$, implicará la existencia de respuesta asimétrica por parte de la volatilidad al impacto de innovaciones positivas o negativas. Concretamente, para $\theta > 0$, las innovaciones positivas causan mayor impacto sobre la volatilidad que las negativas de la misma magnitud.

- Modelos Mixtos.

Los modelos GARCH adolecen de no recoger el impacto del nivel de los tipos de interés sobre la volatilidad de los cambios, es decir, el *efecto nivel*. Además, la mayoría de los trabajos empíricos muestran que $\hat{\beta} + \hat{\alpha} \approx 1$, es decir, que la varianza condicional no es estacionaria y por tanto los shocks presentes afectarán permanentemente a la volatilidad futura, presentando además la indeseable propiedad de permitir tipos negativos. Por su parte, los modelos Nivel presentan, tal y como se ha comentado con anterioridad, tan sólo una especificación para el *efecto nivel* en la que, para $\gamma > 0$, incrementos de los tipos implican, necesariamente, incrementos de la volatilidad, mientras que disminuciones de los tipos implican, necesariamente, disminuciones en la volatilidad; y lo más importante, no recogen completamente la correlación serial en la varianza condicional.

Por todos estos inconvenientes, BHK (1996), entre otros, proponen los modelos Mixtos, en donde se recoge el *efecto nivel* y el *efecto* GARCH simultáneamente, llegando a la conclusión de que CKLS (1992) sobrestiman la sensibilidad de la volatilidad al nivel de los tipos, ya que la incorporación de las innovaciones reduce la estimación del parámetro γ ; mientras que la incorporación del *efecto nivel* a los modelos GARCH mejora sus resultados, principalmente al reducir el nivel de persistencia de las innovaciones sobre la volatilidad ⁸.

⁷ Paralelamente se han estimado los modelos GARCH asimétricos AGARCH (Engle, 1990) y NAGARCH (Engle y Ng, 1993), así como el modelo asimétrico TGARCH (Zakoian, 1994) que modeliza directamente la volatilidad, coincidiendo los resultados obtenidos respecto al efecto apalancamiento con los presentados para el modelo GJR-GARCH.

⁸ Muchos autores han seguido los pasos de BHK (1996) y así podemos considerar modelos Mixtos a los desarrollados por Andersen y Lund (1997a), Koedijk et al. (1997) y Bali (2000a, 2000b, 2003) para Estados Unidos; por Ferreira (2000) para Francia y Alemania; y por Koutmos (2000) para los anteriores países más Canadá, Japón y Reino Unido.

BHK (1996) sugieren la siguiente especificación para la varianza condicional de los cambios del tipo de interés a corto plazo:

$$h_t = \sigma_t^2 r_{t-1}^{2\gamma} \quad (7)$$

donde σ_t^2 presenta estructura GARCH (1,1)

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\varepsilon_{t-1}^2$$

para el modelo Mixto simétrico.

También se consideran los modelos Mixtos asimétricos, es decir aquellos que, además de combinar el efecto nivel y el impacto de las innovaciones en los tipos, recogen la respuesta asimétrica de la volatilidad ante las innovaciones positivas y negativas. Concretamente se presentan resultados del modelo Nivel-GJR-GARCH cuya expresión se obtiene añadiendo en la expresión (7) la especificación de σ_t^2 que desarrolla la expresión (6) ⁹.

3. DESCRIPCIÓN DE LOS DATOS

Dado que el tipo de interés instantáneo es una variable no observable, para llevar a cabo el análisis es necesario recurrir a una variable observable que lo aproxime adecuadamente.¹⁰ Para realizar esta elección hay que sopesar las ventajas e inconvenientes de elegir un tipo de interés a más corto plazo (como sería el diario o el semanal) o uno a más largo plazo (por ejemplo el tipo de interés a un mes, a tres meses, a seis meses). Por un lado, el tipo de interés a tres meses o a seis meses se aleja bastante del concepto de tipo de interés instantáneo, sin embargo un tipo de interés a más corto plazo (diario, semanal) puede recoger las tensiones de liquidez propias del segmento del mercado monetario y de regulación financiera del que se extraen. La elección realizada es la de trabajar con tipos de interés mensuales, con frecuencia diaria, derivados de las operaciones simultáneas al contado con Bonos y Obligaciones del Estado, al igual que se hace en la mayoría de los trabajos revisados de la literatura.

En cuanto al tipo de operación de referencia se ha elegido las Operaciones Simultáneas al Contado, operativamente equivalentes a los *repos* negociados en otros mercados europeos y de EEUU. Los tipos de interés derivados de estas operaciones se calculan bajo el régimen de capitalización simple y año comercial, y sus series históricas en porcentajes anualizados se publican en formato electrónico en el Boletín de la Central de Anotaciones del Banco de España. Esta serie se ha transformado a tipos de interés compuestos continuos.

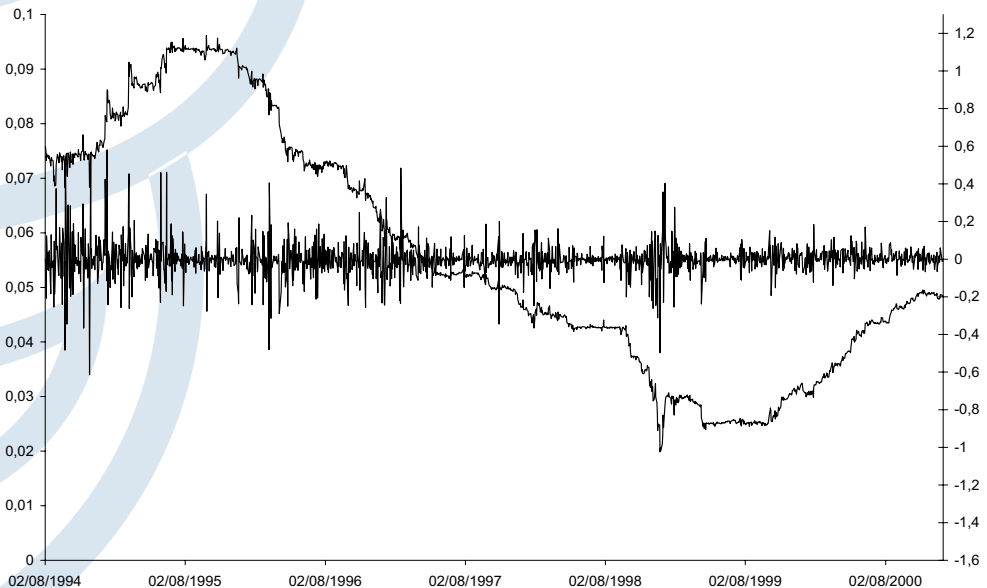
⁹ Paralelamente se han estimado los modelos Nivel-GARCH asimétricos: Nivel-AGARCH y Nivel-NAGARCH, así como el modelo mixto asimétrico Nivel-TGARCH que modeliza directamente la volatilidad, coincidiendo los resultados obtenidos respecto al efecto apalancamiento con los presentados para el modelo Nivel-GJR-GARCH.

¹⁰ En este sentido, señalar que CKLS (1992) y Longstaff y Schwartz (1992) utilizan el tipo de interés de las Letras del Tesoro americanas a un mes; Anderson y Lund (1997) y Stanton (1997) utilizan esos mismos títulos pero a tres meses; Nowman (1997), el tipo de interés interbancario a un mes en Gran Bretaña; Ait-Sahalia (1996) utiliza el tipo Eurodólar a una semana.

Los datos utilizados cubren el periodo comprendido entre agosto de 1994 y diciembre de 2000, en total 1594 observaciones diarias. En el Gráfico 1 se muestra la serie del tipo de interés mensual junto a su primera diferencia¹¹. Puede apreciarse como la volatilidad se presenta por grupos (*efecto GARCH*) y como, en términos generales, ha sido mayor para periodos de tipos altos (*efecto nivel*).

Gráfico 1.
Tipo de interés a un mes y su primera diferencia.

Con trazo fino se representa la serie diaria del tipo de interés de las operaciones simultáneas al contado con Bonos y Obligaciones del Estado al plazo de un mes en capitalización compuesta continua (escala izquierda) desde agosto de 1994 hasta diciembre de 2000. En trazo grueso se representa su primera diferencia en escala porcentual (escala derecha).



En el Cuadro 1 se muestran los estadísticos descriptivos de la primera diferencia de nuestra serie de tipos de interés. La mediana de estos cambios es negativa, lo cual indica que las caídas diarias en el tipo de interés a un mes durante el periodo analizado han sido más importantes que las subidas, como obviamente se aprecia en el Gráfico 1. Se observa que la serie muestra una correlación de orden 1 de mayor magnitud en valor absoluto que las restantes, esto nos sugiere la incorporación de retardos de la variable dependiente como variable explicativa en la media condicional. Utilizando los criterios de Akaike y Schwarz, el número de retardos óptimos es de uno por lo que la media condicional finalmente estimada ha sido:

¹¹ La serie de primeras diferencias presenta cinco valores extremadamente atípicos, cuatro situados en junio de 1995 (los días 7, 9, 16 y 19) y un quinto el día 2 de enero de 1997. Tales valores se alejan de la media en más de siete desviaciones típicas.

$$\mu_t(r_t) = \alpha_0 + \alpha_1 r_t + \alpha_2 \Delta r_{t-1}$$

Por último, el estadístico de Jarque-Bera rechaza la normalidad y el test de raíces unitarias de Dickey-Fuller Aumentado indica la inexistencia de raíz unitaria para esta serie, a diferencia de lo que sucede con la serie al nivel en la que sí se detecta presencia de raíz unitaria.

Cuadro 1.
Estadísticos descriptivos de la serie de primeras diferencias del tipo de interés a corto plazo.

Media	-0.0017	ρ_1	-0.259
Mediana	-0.0015	ρ_2	-0.034
Máximo	0.5807	ρ_3	0.002
Mínimo	-0.6140	ρ_4	0.030
Desviación	0.0881	ρ_5	-0.014
Asimetría	0.3407	ρ_6	-0.029
Curtosis	13.1312	ρ_7	-0.006
Jarque-Bera (p-value)	6843.76 (0.000)	ADF Valor crítico	-27.4262 -1.6165

Este cuadro resume los principales estadísticos de la serie diaria de primeras diferencias del tipo de interés de las operaciones simultáneas al contado con Bonos y Obligaciones del Estado al plazo de un mes. Se expresan en capitalización compuesta continua y en términos porcentuales anualizados. El periodo comprende desde agosto de 1994 hasta diciembre de 2000. Se muestran también los coeficientes de autocorrelación hasta el séptimo orden, así como los resultados del test de raíz unitaria, test de Dickey-Fuller Aumentado (ADF). El número de retardos utilizado es de 4. El valor crítico se presenta al 10%.

4. ESTIMACIÓN Y RESULTADOS

Todos los modelos han sido estimados mediante máxima verosimilitud restringida¹², asumiendo que las perturbaciones son independientes y están idénticamente distribuidas. La estimación máximo verosímil (MV) exige especificar una distribución para las perturbaciones, y generalmente se supone normalidad. De este modo el logaritmo de la función de verosimilitud será:

$$\ln f(\Theta) = \sum_{t=1}^T \left[-\frac{1}{2} \ln h_t - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \right] \quad (8)$$

donde Θ es el verdadero vector de parámetros de la media y varianza condicional.

Las estimaciones llevadas a cabo presentan unos estadísticos t basados en errores estándar robustos ante una incorrecta especificación de las distribuciones supuestas en la estimación – Bollerslev y Wooldridge (1992). El estimador cuasi máximo verosímil es consistente y asintóticamente normal, siempre que la media y la varianza estén correctamente especificadas¹³.

En el Panel A del Cuadro 2 se presentan las estimaciones de los parámetros de los modelos anteriormente descritos. Respecto del parámetro γ , que mide la intensidad del *efecto nivel*, se aprecia una disminución de su valor al pasar del modelo Nivel a los modelos Mixtos, es decir, existe una reducción del *efecto nivel* al introducir la estructura GARCH, resultado coherente con los obtenidos por BHK (1996), Andersen y Lund (1997a), Koedijk et al. (1997), Ferreira (2000) y Bali (2000b), entre otros.

Con respecto a la estructura GARCH, tal y como se observa en el mismo Panel A del Cuadro 2, la suma de los valores estimados para los parámetros β y α en los modelos GARCH supera la unidad, resultado común en BHK (1996), Ferreira (2000), Engle et al. (1987) y Engle y Ng. (1993). Sin embargo, al incorporar el *efecto nivel* se produce una disminución del valor en los parámetros β y α , especialmente en este último, lo que podría permitir una reducción de la persistencia de las innovaciones sobre la volatilidad. Las estimaciones del efecto ARCH en los modelos GARCH y GJR son elevadas y no significativas, mientras que al introducir la especificación mixta, dichas estimaciones decrecen a valores habituales y son significativas. Como indican BHK (1996), tan solo podemos conjeturar que en los modelos Mixtos, a diferencia de los modelos GARCH, la persistencia en los parámetros de la volatilidad es finita. Sin embargo no podemos afirmarlo concluyentemente dado que la persistencia en los modelos Mixtos es una función de la persistencia en el parámetro de volatilidad σ_t , que se mide con la suma de $(\alpha + \beta)$, más la persistencia en el nivel de los tipos.

El parámetro asociado a la varianza condicional del periodo anterior, β , presenta tanto en los modelos GARCH como en los Mixtos un elevado valor estimado, que unido a su alta signi-

¹² Todas las estimaciones se han obtenido utilizando la librería CML de GAUSS.

¹³ Un camino alternativo es el utilizado en BHK (1996) donde se asume una distribución t -student que proporciona la flexibilidad necesaria para capturar la leptocurtosis de los tipos de interés. Sin embargo, estudios como los de Koedijk et al. (1997) y Andersen y Lund (1997a) demuestran que la estimación de los parámetros y sus errores estándar no experimentan cambios importantes al pasar del supuesto de normalidad a la distribución t -student.

Cuadro 2.
Estimación del modelo Nivel general, modelos GARCH y Mixtos

Los parámetros han sido estimados a partir de las siguientes especificaciones econométricas:

$$\Delta r_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + \alpha_2 \Delta r_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = h_t^{1/2} \eta_t, \quad \eta_t : iid N(0,1)$$

CKLS $h_t = \sigma^2 r_{t-1}^{2\gamma}$

GARCH $h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha \varepsilon_{t-1}^2$

GJR $h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \theta D_{t-1}^+ \varepsilon_{t-1}^2$; $D_{t-1}^+ = 1$ si $\varepsilon_{t-1} > 0$; $D_{t-1}^+ = 0$ si no

Nivel-GARCH $h_t = \sigma_t^2 r_{t-1}^{2\gamma}$, con $\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2$

Nivel-GJR $h_t = \sigma_t^2 r_{t-1}^{2\gamma}$, con $\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \theta D_{t-1}^+ \varepsilon_{t-1}^2$; $D_{t-1}^+ = 1$ si $\varepsilon_{t-1} > 0$; $D_{t-1}^+ = 0$ si no

	Modelo Nivel	Modelos GARCH		Modelos Mixtos	
	CKLS	GARCH	GJR	Nivel-GARCH	Nivel-GJR
PANEL A					
α_0	0.0042 (0.720)	0.0033 (0.868)	0.0021 (0.213)	0.0029 (0.818)	0.0018 (0.518)
α_1	-0.0011 (-1.022)	-0.0011 (-1.275)	-0.0008 (-0.775)	-0.0011 (-1.462)	-0.0011 (-1.558)
α_2	-0.2453 (-5.101)	-0.3171 (-8.556)	0.0004 (0.063)	-0.3290 (-8.965)	-0.2268 (-6.174)
σ	0.0432 (4.994)				
γ	0.4240 (3.527)			0.2990 (3.093)	0.2839 (2.911)
ω		0.0001 (0.905)	0.0002 (0.853)	0.0001 (0.000)	0.0001 (0.000)
β		0.7181 (4.711)	0.6514 (2.252)	0.6168 (4.570)	0.6236 (4.809)
α		0.3501 (1.799)	0.4430 (1.226)	0.1576 (2.087)	0.1334 (2.092)
θ			0.0426 (0.157)		0.0557 (0.822)
PANEL B					
Log-L	3175.13	3510.75	3457.95	3530.62	3500.82
SIC	3156.70	3488.63	3432.14	3504.81	3471.33
$Q^2(20)$	497.99 (0.000)	16.936 (0.657)	15.291 (0.760)	9.7526 (0.972)	9.8604 (0.971)
EM	0.0306	0.0270	0.0317	0.0242	0.0238
EAM	0.0598	0.0410	0.0552	0.0396	0.0500

Panel A: Resultados de la estimación por máxima verosimilitud con desviaciones típicas robustas de Bollerslev y Wooldridge (1992). Estadístico t entre paréntesis. Panel B: Log-L es el logaritmo de la función de verosimilitud y SIC el Criterio de Información de Schwarz. $Q^2(20)$ es el estadístico de Ljung-Box de autocorrelación en los residuos estandarizados al cuadrado, y entre paréntesis aparece el p-valor. EM y EAM son el error medio y el error absoluto medio, respectivamente.

ficatividad, sostiene la idea de un fuerte comportamiento de inercia de la volatilidad de los tipos de interés.

Con respecto al *efecto apalancamiento* todos los modelos asimétricos analizados evidencian una falta de respuesta asimétrica de la volatilidad, tanto para el caso de los modelos GARCH como de los modelos Mixtos. Este resultado, en la línea de los obtenidos en Andersen y Lund (1997b), puede estar relacionado con la evolución del tipo de interés a corto plazo en el periodo de tiempo considerado.

En el Panel B del Cuadro 2 observamos que bajo el Criterio de Información de Schwarz (SIC) los modelos GARCH superan en ajuste al modelo Nivel general (CKLS), y a su vez los modelos Mixtos superan a los modelos GARCH. Es decir, los modelos que especifican la volatilidad únicamente en función de las innovaciones captan mejor la volatilidad que aquellos que lo hacen únicamente en función del nivel, confirmando de este modo las conclusiones de BHK (1996), Koutmos (2000) y Bali (2000b y 2003). Sin embargo, la combinación del *efecto nivel* y la estructura GARCH mejora cualquier especificación que considere ambas características por separado. Conclusiones que pueden corroborarse observando el estadístico Ljung-Box de autocorrelación en los residuos estandarizados al cuadrado, $Q^2(20)$, donde se aprecia como el paso del modelo Nivel a los modelos GARCH y de éstos a los modelos Mixtos va recogiendo cada vez mejor la estructura en la volatilidad.

En este sentido, el Gráfico 2 dibuja la volatilidad realizada del período, aproximada mediante $|\Delta r_t|$,¹⁴ y las estimaciones de volatilidad de los modelos GARCH, Nivel-GARCH y CKLS. En él se observa como los dos primeros recogen bastante bien la estructura de la serie de volatilidad realizada, mientras que el modelo de CKLS muestra una estimación relativamente plana. En el mismo Panel B del Cuadro 2 aparecen los estadísticos error medio (EM) y error absoluto medio (EAM), donde

$$EM = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (h_t^{1/2} - |\Delta r_t|) \quad (9)$$

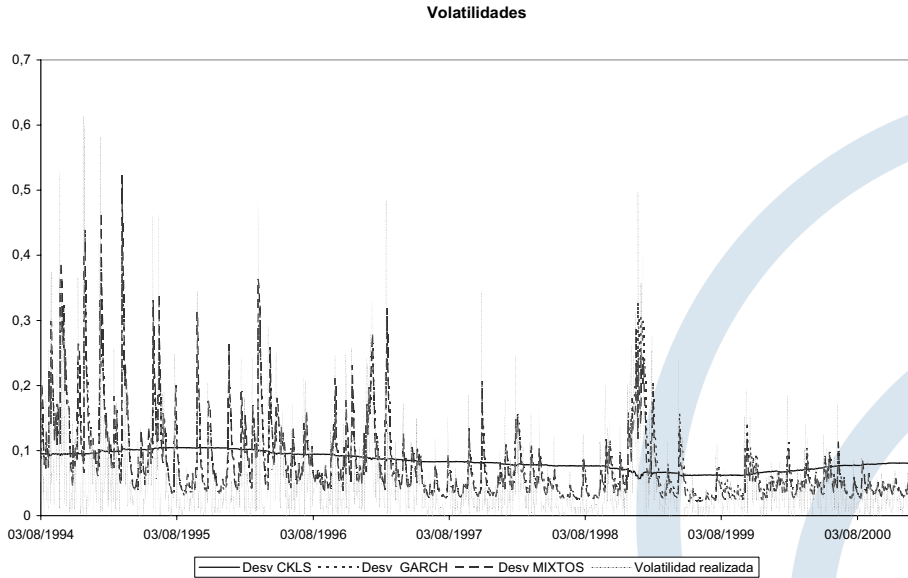
$$EAM = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |h_t^{1/2} - |\Delta r_t|| \quad (10)$$

siendo $h_t^{1/2}$ la desviación estimada para cada modelo. Según EM observamos que todos los modelos sobreestiman la volatilidad realizada, siendo el modelo mixto el que presenta menor sobreestimación. También el modelo mixto tiene el menor EAM, ratificando su superioridad sobre los otros dos modelos.

¹⁴ Este criterio para aproximar la variable volatilidad no observable es el comúnmente utilizado en la literatura citada sobre modelización del tipo de interés a corto plazo (pueden verse al respecto los trabajos de Bali, 2003, 2000a, Ferreira, 2000, BHK, 1996 y CKLS, 1992), tanto para la medición de la capacidad predictiva de la volatilidad dentro de la muestra, tal y como aquí ocurre, como fuera de ella. No obstante, cabe señalar que la utilización de esta variable de aproximación de la volatilidad en series de frecuencia diaria puede provocar una aparente contradicción entre buenas predicciones de volatilidad, dentro y/o fuera de la muestra, y el bajo poder predictivo de la serie observable utilizada, debido a su elevado error de medida. En este sentido, Andersen y Bollerslev (1998) demuestran que el coeficiente de determinación teórico de la regresión lineal simple de la variable realizada ex-post sobre la predicción GARCH (1,1) a un día es muy bajo.

Gráfico 2.
Volatilidad diaria del tipo de interés a un mes.

Se representan las series de volatilidad estimada con los modelos: CKLS, GARCH y Mixto, así como la volatilidad realizada durante el periodo de análisis (de agosto de 1994 a diciembre de 2000) aproximada mediante $|\Delta r_t|$



Cuadro 3.
Contraste de razón de verosimilitud.

Panel A: Modelos GARCH versus Modelos Mixtos		Estadístico LR
$H_0 : \gamma = 0$	H_1	
Modelo	Modelo	
GARCH	Nivel-GARCH	39.74
GJR	Nivel-GJR	85.74

Panel B: Modelo CKLS versus Modelo Mixto		
$H_0 : \beta = \alpha = 0$	H_1	
Modelo	Modelo	
CKLS	Nivel-GARCH	710.98

Este cuadro presenta los resultados del contraste de razón de verosimilitud (likelihood ratio: LR) que viene dado por la siguiente expresión: $LR = -2(\text{Log } \hat{L} - \text{Log } L)$, siendo $\text{Log } \hat{L}$ el valor del logaritmo de la función de verosimilitud evaluada bajo la hipótesis nula y $\text{Log } L$ bajo la hipótesis alternativa. El estadístico LR se distribuye asintóticamente como una χ^2 con grados de libertad igual al número de restricciones bajo la hipótesis nula. Los valores críticos para uno y dos grados de libertad al 5% son $\chi^2_{(1,0.05)} = 3.84$ y $\chi^2_{(2,0.05)} = 5.99$.

Adicionalmente comparamos los modelos a través del contraste de razón de verosimilitud que aparece en el Cuadro 3. Bajo la restricción $\gamma=0$ los modelos Mixtos anidan a los modelos GARCH correspondientes y bajo las restricciones $\beta=\alpha=0$ al modelo de CKLS. Tales restricciones conforman las hipótesis nulas en el contraste de razón de verosimilitud. El rechazo de ambas hipótesis pone de manifiesto la necesidad de modelizar la volatilidad conjuntamente en función del nivel y del impacto de las innovaciones.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se han analizado tres grandes grupos de modelos para la volatilidad de los cambios en el tipo de interés a corto plazo en el mercado español: los llamados modelos Nivel, anidados por el modelo empírico de CKLS (1992); los modelos GARCH, el simétrico y el GJR-GARCH asimétrico; y los modelos Mixtos propuestos por BHK (1996), para los cuales la volatilidad es función tanto del nivel de los tipos como del impacto de las innovaciones.

Los resultados nos llevan a corroborar las conclusiones de BHK (1996): los modelos Mixtos mejoran cualquier especificación de la volatilidad que considere por separado el *efecto nivel* y la estructura GARCH. Así, el modelo Nivel general de CKLS muestra una estimación de la sensibilidad al nivel de los tipos que se ve reducida al incorporar el impacto de las innovaciones, indicando que los modelos de Nivel tienden a sobrestimar tal efecto debido a una mala especificación de la volatilidad. Por su parte la familia de modelos GARCH al incorporarles el *efecto nivel* reducen el alto grado de persistencia en la volatilidad, al menos en la parte que corresponde al parámetro de volatilidad σ_t .

Por último, la falta de evidencia de respuesta asimétrica de la volatilidad a las innovaciones positivas y negativas, nos permite concluir que de los modelos aquí analizados, el modelo Mixto simétrico, es decir, el modelo Nivel-GARCH resulta ser el más adecuado para modelizar la volatilidad de los tipos de interés a corto plazo en la muestra analizada.

REFERENCIAS

- Abad, P., 2000. La estructura temporal de volatilidades en el mercado de swaps de tipos de interés, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.
- Ait-Sahalia, Y., 1996. Testing continuous time models of the spot interest rate, *Review of Financial Studies* 9 (2), 385-426.
- Andersen, T. y Bollerslev, 1998. Answering the skeptics: yes, standard volatility models do provide accurate forecasts, *International Economic Review* 39, 885-905.
- Andersen, T. y J. Lund, 1997a. Estimating continuous-time stochastic volatility models of the short-term interest rate, *Journal of Econometrics* 77, 343-377.
- Andersen, T. y J. Lund, 1997b. Stochastic volatility and mean drift in the short rate difusión: sources of steepness, level and curvature in the yield curve, WP 214, Northwestern University, Kellogg Graduate School of Management.
- Bali, T.G., 1999. An Empirical Comparison of Continuous Time Models of the Short Term Interest Rate, *Journal of Futures Markets* 19, 777-797

- Bali, T.G., 2000a. Modeling the conditional mean and variance of the short rate using diffusion, GARCH, and moving average models, *Journal of Futures Markets* 20 (8), 717-551.
- Bali, T.G., 2000b. Testing the empirical performance of stochastic volatility models of the short-term interest rate, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 35 (2), 191-215.
- Bali, T.G., 2003. Modelling the stochastic behavior of short-term interest rates: Pricing implications for discount bonds, *Journal of Banking and Finance* 27 (2), 201-228.
- Ball, C. y W. Torous, 1999. The stochastic volatility of short-term interest rates: International evidence, *Journal of Finance* 54 (6), 2339-2359.
- Benito, S., 2001. Factores comunes en los niveles y la volatilidad de los tipos cupón cero de la Deuda Pública española, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.
- Black, F. y M. Scholes, 1973. The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 637-654.
- Bollerslev, T., 1986. Generalized autorregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* 31, 307-320.
- Bollerslev, T. y J. Wooldridge, 1992. Quasi maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time varying covariance, *Econometric Reviews* 11, 143-172.
- Brennan, M. y E. Schwartz, 1980. Analyzing convertible bonds, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 15, 907-929.
- Brenner, R.J., Harjes, R. y K. Kroner, 1996. Another look at models of the short term interest rate, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 31, 85-107.
- Chan, K., Karolyi, A., Longstaff, F. y A. Sanders, 1992. An empirical comparison of models of short term interest rates, *Journal of Finance* 47, 1209-1227.
- Cox, J., 1975. Notes on option pricing I: Constant elasticity of variance diffusions, WP, Stanford University.
- Cox, J., Ingersoll, J. y S. Ross, 1980. An analysis of variable rate loan contracts, *Journal of Finance* 35 (2), 389-403.
- Cox, J., Ingersoll, J. y S. Ross, 1985. A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica* 53 (2), 385-407.
- Cox, J. y S. Ross, 1976. The valuation of options for alternative stochastic processes, *Journal of Financial Economics* 3 (1-2), 145-166.
- Dothan, L.U., 1978. On the term structure of interest rates, *Journal of Financial Economics* 6 (1), 59-69.
- Engle, R., 1982. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance U.K. inflation, *Econometrica* 50 (4), 987-1008.

- Engle, R., 1990. Discussion: Stock market volatility and the Crash of '87, *Review of Financial Studies* 3, 103-106.
- Engle, R., Lilien, D. y R. Robins, 1987. Estimating time varying risk premia in the term structure: the ARCH-M Model, *Econometrica* 55 (2), 391-407.
- Engle, R. y V. Ng, 1993. Measuring and testing the impact of news on volatility, *Journal of Finance* 48 (5), 1749-1778.
- Ferreira, M., 2000. Testing models of the spot interest rate volatility, Mimeo (<http://home.iscte.pt/~mlaf>).
- García, J., 1998. Tipos de interés a corto Plazo en España, *Revista de Economía Aplicada* 6 (18), 5-26.
- Glosten, L., Jagannathan, R. y D. Runkle, 1993. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, *Journal of Finance* 48, 1779-1801.
- James J. y N. Webber, 2000. *Interest rate modelling*, John Wiley & Sons, Ltd., England.
- Kearns, P., 1992. Pricing interest rate derivative securities when volatility is stochastic, Mimeo, University of Rochester, NY.
- Koedijk, K., Nissen, F., Schotman, P. y C. Wolff, 1997. The dynamics of short-term rates volatility reconsidered, *European Finance Review* 1, 105-130.
- Koutmos, G., 2000. Modeling short-term interest rate volatility: information shocks versus interest rate levels, *Journal of Fixed Income* 9 (4), 19-26.
- Longstaff, F. y E. Schwartz, 1992. Interest rate volatility and the term structure: A two factor general equilibrium model, *Journal of Finance* 47 (4), 1259-1282.
- Merton, R., 1973. Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141-183.
- Moreno, M. y J.I. Peña, 1996. On the Term Structure of Interbank Interest Rates: Jump-Diffusion Processes and Option Pricing, en Dunis, C., *Forecasting Financial Markets: Advances for Exchange Rates, Interest Rates and Asset Management*, John Wiley & Sons, 159-180.
- Navas, J., 1999. Consistent vs. Non-Consistent Term Structure Models: Some Evidence from the Spanish Market, *Journal of Fixed Income* 9 (3), 42-60.
- Rico, P., 2000. Procesos estocásticos del tipo de interés a corto plazo, *Revista de Economía Aplicada* 8 (22), 57-70.
- Stanton, R., 1997. A nonparametric model of term structure dynamics and the market price of interest rate risk, *Journal of Finance* 52 (5), 1973-2002.
- Vasicek, O., 1977. An equilibrium characterization of the term structure of interest, *Journal of Financial Economics* 5 (2), 177-188.
- Zakoian, J., 1994. Threshold heteroskedastic models, *Journal of Economic and Control* 18, 931-995.